13. Erityyppisten integraalien väliset yhteydet

13.1. Gaussin lause

364.

Laske

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, da,$$

kun A on tason origokeskinen yksikköympyrä, jonka kehällä funktion f arvot saadaan lausekkeesta $f(x,y) = 2x - 3y^2$.

VASTAUS:

365.

Tarkista laskemalla Greenin lauseen voimassaolo, kun $\mathbf{u}(x,y) = (2xy - x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$ ja integroidaan käyrien $y = x^2$ ja $x = y^2$ rajaaman rajoitetun alueen yli.

VASTAUS:

366.

Laske integraali

$$\oint_c (e^x - 4y\sin^2 x)dx + (2x + \sin 2x)dy$$

a) suoraan viivaintegraalina, b) palauttamalla tasointegraaliksi. Tie c on neliön

$$\{\,(x,y) \mid |x| \leq 2,\ |y| \leq 2\,\}$$

piiri positiiviseen suuntaan kierrettynä.

VASTAUS:

367.

Laske a) suoraan viivaintegraalina, b) tasointegraaliksi muuntamalla

$$\oint_c y^2\, dx + (x+y)^2\, dy,$$

kun c on sen kolmion piiri positiiviseen suuntaan kierrettynä, jonka kärjet ovat $(a,0)$, (a,a) ja $(0,a)$; oletetaan $a > 0$.

VASTAUS: $\frac{2}{3}a^3$.

368.

Olkoon funktio $f(x)$ jatkuvasti derivoituva ja olkoon $\mathbf{u}(x,y) = (2xy - y)\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$ tason vektorikenttä. Olkoon c säännöllinen umpinainen tasokäyrä. Osoita, että f voidaan valita äärettömän monella tavalla siten, että integraali $\oint_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ antaa käyrän c reunustaman alueen pinta-alan.

VASTAUS:

369.

Laske

$$\oint_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{n},$$

kun $\mathbf{u}(x,y) = (x + e^y)\mathbf{i} + (\sin x + 2y)\mathbf{j}$, tie c on ellipsi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ positiiviseen suuntaan kierrettynä ja $\mathbf{n}$ on tämän yksikköulkonormaalivektori. Tehtävä voidaan laskea joko suoraan viivaintegraalina tai palauttamalla tasointegraaliksi.

VASTAUS:

370.

Olkoon A tasoalue ja ∂A tämän reuna, joka oletetaan säännölliseksi käyräksi. Funktio $u(x,y)$ olkoon harmoninen, ts. $\nabla^2 u = 0$ alueessa A. Osoita, että

$$\oint_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0,$$

missä $\frac{\partial u}{\partial n}$ tarkoittaa funktion u derivaattaa reunan ∂A ulkonormaalin suuntaan.

VASTAUS: Sovella Gaussin lauseen tasoversiota.

371.

Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vuo kuution

$$\{\,(x,y,z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\,\}$$

pinnan läpi a) pintaintegraalina, b) avaruusintegraalina.

VASTAUS:

372.

Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = z^2(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) + \mathbf{k}$ vuo kuution $|x| \le \frac{1}{2},\ |y| \le \frac{1}{2},\ |z| \le \frac{1}{2}$ pinnan läpi.

VASTAUS:

373.

Laske Gaussin lauseen avulla kentän $\mathbf{u}(x,y,z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ vuo kuution $\{\,(x,y,z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\,\}$ pinnan läpi.

VASTAUS:

374.

Laske Gaussin lauseen avulla kentän $\mathbf{u}(x,y,z) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^{\cos z}\,\mathbf{j} + e^{x \sin y}\,\mathbf{k}$ vuo kuution $\{\,(x,y,z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\,\}$ pinnan läpi.

VASTAUS:

375.

Olkoon V koordinaattitasojen ja tason $x + y + z = 1$ rajoittama alue, ∂V tämän reunapinta. Olkoon $\mathbf{u}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Laske Gaussin lausetta käyttäen integraali

$$\oint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

VASTAUS:

376.

Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2 - 1)\,\mathbf{i} - x^2 y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ vuo pintojen $z = 0$, $z = 1$ ja $x^2 + y^2 = 4$ rajoittaman kappaleen pinnan läpi.

VASTAUS:

377.

Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = x^4\,\mathbf{i} + y^2z^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ vuo kappaleen $\{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\,\}$ pinnan läpi.

VASTAUS:

378.

Laske vuo

$$\oint_{\partial V} (x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S},$$

kun $V = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-4y+2z+2 \le 0\,\}$.

VASTAUS:

379.

Määritä pintaintegraalin

$$\oint_B [(x+y)\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} + (y-z)\,\mathbf{k}] \times d\mathbf{S}$$

arvo, kun integroimisjoukkona on palloneljänneksen $\{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\,\}$ pinta.

VASTAUS:

380.

Olkoon A rajoitettu tason $\mathbb{R}^2$ alue ja V vastaavasti rajoitettu avaruuden $\mathbb{R}^3$ alue; näiden reunat ∂A ja ∂V olkoot säännöllisiä. Mikä geometrinen merkitys on seuraavilla integraaleilla:

$$\text{a)}\quad \tfrac{1}{2}\oint_{\partial A} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}, \qquad \text{b)}\quad \tfrac{1}{3}\oint_{\partial V} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \quad ?$$

VASTAUS: a) Joukon A ala; b) joukon V tilavuus.

381.

Vektorikenttä $\mathbf{u}$ olkoon rajoitetun alueen V säännöllisellä pinnalla kaikkialla kohtisuorassa pintaa vastaan. Osoita, että

$$\int_V \nabla \times \mathbf{u}\,dv = \mathbf{o}.$$

VASTAUS:

382.

Osoita:

$$\int_V \mathbf{r}\,dv = \frac{1}{2}\oint_{\partial V} r^2\,d\mathbf{S}.$$

VASTAUS:

383.

Olkoon V alue, jolla on säännöllinen pinta ∂V; olkoon origo alueen V ulkopiste. Muunna seuraavat pintaintegraalit alueen V yli otetuiksi avaruusintegraaleiksi:

$$\text{a)}\quad \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r}\,dS, \qquad \text{b)}\quad \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\,dS.$$

VASTAUS:

384.

Olkoon **c** vakiovektori. Laske

$$\oint_{\partial V} (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) \times d\mathbf{S}.$$

VASTAUS:

385.

Skalaarikenttä $u(x,y,z)$ olkoon kahdesti jatkuvasti derivoituva avaruuden $\mathbb{R}^3$ säännöllisessä rajoitetussa joukossa V. Osoita:

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \int_V \nabla^2 u\, dv,$$

missä $\frac{\partial u}{\partial n}$ tarkoittaa funktion u suunnattua derivaattaa pinnan ∂V ulkonormaalin suuntaan.

VASTAUS:

386.

Olkoot u ja v kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sekä V alue, jonka reuna ∂V on säännöllinen. Oletetaan lisäksi, että ∇v on jokaisessa reunan ∂V pisteessä tangenttitason suuntainen. Laske Gaussin lauseen avulla

$$\int_V (u\nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dv.$$

VASTAUS:

387.

Olkoon $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio, jonka tasa-arvopinnat ovat umpinaisia säännöllisisä pintoja siten, että pienempää arvoa vastaava pinta aina jää suurempaa arvoa vastaavan sisään. Mikä geometrinen tulkinta on tietyn tasa-arvopinnan rajoittaman alueen V yli otetun integraalin

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{\nabla u \cdot \nabla u}}\, dv$$

arvolla?

VASTAUS:

388.

Olkoon $V \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu joukko, jolla on origo sisäpisteenä ja jonka reuna ∂V on säännöllinen. Laske

a) epäoleellinen avaruusintegraali $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r}\, dv,$

b) pintaintegraali $\displaystyle\oint_{\partial V} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S}.$

Seuraako Gaussin lauseesta, että integraalien arvot ovat samat?

VASTAUS: a) 0; b) -4π.

389.

Laske avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorikentän $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$ vuo origokeskisen R-säteisen pallopinnan läpi. Laske kentän divergenssi. Voidaanko vuo laskea Gaussin lauseen avulla? Jos ei, niin miksi ei?

VASTAUS:

390.

Laske vektorikentän $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = r\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ paikkavektori, r sen pituus) vuo R-säteisen origokeskisen pallon läpi a) pintaintegraalina, b) muuntamalla pintaintegraali Gaussin lauseen avulla avaruusintegraaliksi. Millainen on kentän $\mathbf{u}$ lähdekenttä xyz-koordinaateissa?

VASTAUS: $4\pi R^4$, lähdekenttä $4r = 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

391.

Osoita Gaussin lauseen avulla, että pintaintegraali

$$\oint_S \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^4}\,\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}$$

on riippumaton siitä, millainen origoa ympäröivä (säännöllinen) pinta S on. (Tässä $\mathbf{r}$ on paikkavektori ja r sen itseisarvo.) Laske integraali valitsemalla pinnaksi S origokeskinen pallopinta.

VASTAUS: π^2.

392.

Homogeenisessa nesteessä vallitsee syvyydessä z paine $p = p_0 + g\rho z$, missä g on maan vetovoiman kiihtyvyys, ρ nesteen tiheys ja p_0 paine nesteen pinnalla. Nesteeseen upotetun kappaleen pinta-alkioon dS vaikuttaa tällöin voima $-p\mathbf{n}\,dS$; kokonaisvoima saadaan integroimalla tämä lauseke kappaleen pinnan yli. Sovella tähän integraaliin yleistettyä Gaussin lausetta ja johda tällä tavoin *Arkhimedeen periaate*.

VASTAUS: Kappaleeseen vaikuttaa noste $g\rho v$, missä v on kappaleen tilavuus.

13.2. Stokesin lause

393.

Olkoon c on puoliympyrän $\{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\,\}$ piiri. Laske viivaintegraali

$$\oint_c (x+y^2)\,d\mathbf{r}$$

a) suoraan viivaintegraalina, b) muuntamalla se ensin sopivaa Stokesin lauseen muotoa käyttäen.

VASTAUS:

394.

Laske suoraan viivaintegraalina ja Stokesin lauseen avulla

$$\oint_c (z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k})\cdot d\mathbf{r},$$

kun c on lieriön $x^2+y^2 = 9$ ja tason $3x+2y+z = 6$ leikkauskäyrä kierrettynä origosta katsottaessa vastapäivään.

VASTAUS:

395.

Laske sekä suoraan viivaintegraalina että Stokesin lauseen avulla

$$\oint_c \left[yz\,\mathbf{i} + (xz^2-3y)\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}\right]\cdot d\mathbf{r},$$

missä c on käyrä $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

VASTAUS: $\frac{3}{4}\pi$.

396.

Olkoon $\mathbf{u}(x,y,z) = yze^{xy}\,\mathbf{i} + xz(1+e^{xy})\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$. Laske viivaintegraali

$$\oint_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r},$$

missä c on lieriön $x^2 + y^2 = 4$ ja tason $2x + 3y + z = 5$ leikkauskäyrä kierrettynä origosta katsottaessa myötäpäivään.

VASTAUS:

397.

Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = x\,\mathbf{k}$ viivaintegraali $\int_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$, kun c on pinnanpalan

$$\begin{cases} x = 8u^2, \\ y = v^2, \\ z = 4uv, \end{cases} \qquad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 3$$

reuna a) suoraan viivaintegraalina, b) muuntamalla integraali ensin Stokesin lauseen avulla pintaintegraaliksi.

VASTAUS:

398.

Laske integraali

$$\int_B \nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S},$$

kun B on a) xy-tason yksikkökiekko $\{\,(x,y,0) \mid x^2 + y^2 \le 1\,\}$, b) avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon $\{\,(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,\}$ ylempi puolipallo, c) em. yksikköpallon alempi puolipallo. Pinta-alkioon $d\mathbf{S}$ sisältyvä normaalisuunta otetaan a-kohdassa ylöspäin, b- ja c-kohdissa pallosta ulospäin.

VASTAUS: a) 2π; b) 2π; c) -2π.

399.

Olkoon $\mathbf{u}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ vektorikenttä ja $z = xy$, $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ pinnanapala. Laske viivaintegraali $\int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ pitkin pinnanpalan reunaa a) suoraan viivaintegraalina, b) muuntamalla se ensin pintaintegraaliksi Stokesin lauseen avulla.

VASTAUS: 4.

400.

Laske Stokesin lauseen avulla pintaintegraali

$$\int_B \nabla \times [(x - z^2)\,\mathbf{i} + (x^3 + z)\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}] \cdot d\mathbf{S},$$

missä B on huipun ja xy-tason väliin jäävä kartiopinnan $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ osa. Häiritseekö kartion huippu Stokesin lauseen käyttöä?

VASTAUS:

401.

Osoita:

$$\int_B d\mathbf{S} \times \mathbf{r} = \tfrac{1}{2} \oint_{\delta B} r^2 \, d\mathbf{r},$$

missä B on jokin säännöllinen pinnanpala ja δB sen reuna pinnan normaaliin nähden positiiviseen suuntaan kierrettynä.

VASTAUS:

402.

Olkoon $\mathbf{c}$ vakiovektori, B jokin säännöllinen pinnanpala ja δB sen reuna pinnan normaaliin nähden positiiviseen suuntaan kierrettynä. Osoita, että

$$\text{a)} \int_B \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{c} \cdot \int_B d\mathbf{S} = \tfrac{1}{2} \oint_{\delta B} \mathbf{c} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r};$$

$$\text{b)} \int_B \mathbf{c} \times d\mathbf{S} = \mathbf{c} \times \int_B d\mathbf{S} = -\oint_{\delta B} \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{c}).$$

VASTAUS:

13.3. Gaussin ja Stokesin lauseen yleistyksiä

403.

Olkoon $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ harmoninen funktio ja $V \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu joukko, jonka reuna ∂V on säännöllinen. Osoita:

$$\oint_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \int_V |\nabla u|^2 \, dv.$$

Tässä $\frac{\partial u}{\partial n}$ on funktion u derivaatta pinnan ∂V ulkonormaalin suuntaan.

VASTAUS:

13.4. Kulma ja avaruuskulma

404.

Neliön kärjet sijaitsevat pisteissä $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$ ja $(1,1,0)$. Kirjoita integraali, joka esittää sen avaruuskulman suuruutta, jossa neliö näkyy origosta.

VASTAUS:

405.

Laske edellisen tehtävän integraali tai sen likiarvo seuraavilla tavoilla: a) geometrinen päättely, b) integrointi kynällä ja paperilla, c) symbolinen tietokoneohjelma.

VASTAUS:

406.

Neliön kärjet sijaitsevat pisteissä $(a,-1,-1)$, $(a,1,-1)$, $(a,1,1)$ ja $(a,-1,1)$, $a > 0$. Muodosta integraali, joka esittää sen avaruuskulman suuruutta, jossa neliö näkyy origosta. Laske integraali. Mikä on avaruuskulman raja-arvo, kun $a \to 0$?

VASTAUS: Avaruuskulman suuruus $4\,\overline{\text{arc}}\tan(1/(a\sqrt{2+a^2}))$; raja-arvo 2π.