14. Pyörteettömät ja lähteettömät vektorikentät; potentiaali

14.1. Lähdekenttä ja pyörrekenttä

407.

Vektorikenttä määritellään lieriökoordinaateissa asettamalla

$$\mathbf{u}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{z^2+(\rho-1)^2}\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Kuvaile, millainen kenttä on kyseessä. Laske sen divergenssi ja roottori. Mitä nämä kertovat kentästä?

VASTAUS:

408.

Pallosymmetrinen vektorikenttä määritellään yhtälöillä

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\mathbf{r}, & \text{kun } r \le R, \\ \dfrac{R^3}{3r^3}\,\mathbf{r}, & \text{kun } r \ge R. \end{cases}$$

Laske kentän lähde- ja pyörrekenttä sekä vuo origokeskisen r-säteisen pallopinnan läpi.

VASTAUS:

409.

Osoita, että avaruuden kahdeksannes

$$\{\,(x,y,z) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\,\}$$

on vektorikentän $-\nabla\dfrac{1}{r}$ kenttäputki. Olkoon B mielivaltainen paloittain säännöllinen putken poikkileikkauspinta. Laske kentän vuo pinnan B läpi.

VASTAUS:

14.2. Pyörteetön vektorikenttä

410.

Todista, että xy-tason ympyrät $x^2+y^2=1$ ja $x^2+y^2-4x=5$ ovat homotooppiset konstruoimalla sopiva kahden muuttujan jatkuva vektorifunktio, joka välittää muuntumisen.

VASTAUS:

411.

Tutki, onko kaksiulotteisella vektorikentällä $\mathbf{u}(x,y) = (y+2x)\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ potentiaalia, ts. onko olemassa skalaarifunktiota $V(x,y)$, jonka gradienttina kenttä saadaan. Laske potentiaali myönteisessä tapauksessa. Laske viivaintegraali

$$\int_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r},$$

missä c on pisteitä $(1,0)$ ja $(1,2)$ yhdistävä origon kautta kulkeva ympyrän kaari.

VASTAUS:

412.

Määritä funktio $g(y)$ siten, että tason vektorikentällä

$$\mathbf{u}(x,y) = 2xyg(y)\,\mathbf{i} + x^2(y+1)g(y)\,\mathbf{j}$$

on potentiaali.

VASTAUS: $g(y) = Ce^y$.

413.

Valitse vakio c siten, että tason vektorikenttä

$$\mathbf{u}(x,y) = (x+cxy)\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$$

on pyörteetön. Määritä potentiaali, joka häviää pisteessä $(1,1)$. Laske valitsemallasi arvolla c viivaintegraali

$$\int_P^Q \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}$$

pisteitä $P \mathrel{\widehat{=}} (2a, -\frac{3}{5})$ ja $Q \mathrel{\widehat{=}} (a, \frac{3}{5})$ yhdistävää paloittain sileää tietä pitkin.

VASTAUS:

414.

Osoita vektorikenttä $\mathbf{u}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + z\cos y\,\mathbf{j} + (x+\sin y)\,\mathbf{k}$ pyörteettömäksi ja muodosta sen (skalaari)potentiaali.

VASTAUS:

415.

Osoita seuraavat vektorikentät $\mathbf{u}(x,y,z)$ koko avaruudessa pyörteettömiksi ja etsi niiden skalaaripotentiaalit:

a) $e^x\sin y\,\mathbf{i} + e^x\cos y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
b) $x\,\mathbf{i} + z\sin y\,\mathbf{j} - \cos y\,\mathbf{k}$,
c) $2xyz\,\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + x^2y\,\mathbf{k}$,
d) $(x^2+y^2+z^2)(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = r^2\mathbf{r}$,
e) $-2xe^{-y}\,\mathbf{i} + (x^2e^{-y} + \sin z)\,\mathbf{j} + y\cos z\,\mathbf{k}$.

VASTAUS:

416.

Miten funktio $f(z)$ on valittava, jotta vektorikenttä

$$\mathbf{u}(x,y,z) = xy^2\,\mathbf{i} + (\cos z + x^2y)\,\mathbf{j} + yf(z)\,\mathbf{k}$$

olisi pyörteetön koko avaruudessa? Määritä kentän potentiaali.

VASTAUS:

417.

Vektorikenttä

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$$

on määritelty koko avaruudessa z-akselia lukuunottamatta. Osoita, että se on pyörteetön ja konservatiivinen. Etsi potentiaali.

VASTAUS:

418.

Olkoon c puolitasossa $\{\,(x,y) \mid x > 0\,\}$ pisteitä $(2,-2)$ ja $(5,0)$ yhdistävä paloittain sileä käyrä. Osoita, että tason viivaintegraali

$$\int_c \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx - \overline{\text{arc}}\tan\frac{y}{x}\,dy$$

on tiestä c riippumaton ja laske sen arvo.

VASTAUS:

419.

Muodosta vektorikentälle

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\mathbf{r}, & \text{kun } r \le R, \\[2ex] \dfrac{R^3}{3r^3}\,\mathbf{r}, & \text{kun } r \ge R. \end{cases}$$

fysikaalinen skalaaripotentiaali, so. etsi funktio $V(\mathbf{r})$, jolle pätee $\mathbf{u} = -\nabla V$. Normeeraa V siten, että sen raja-arvo äärettömyydessä on $= 0$.

VASTAUS: $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{6}(3R^2 - r^2)$, jos $r \le R$; $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{3}R^3/r$, jos $r \ge R$.

420.

Mikä ehto vakiovektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ on toteutettava, jotta kenttä $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})$ olisi pyörteetön? Osoita, että tällöin kentällä on potentiaali $V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})$.

VASTAUS:

421.

Dipolin (kaksoislähteen) muodostaman vektorikentän potentiaali on

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3},$$

missä $\mathbf{p}$ on vakiovektori. Laske kenttä ja sen lähdekenttä.

VASTAUS: $\mathbf{u} = \frac{3}{4\pi}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\dfrac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{p}}{r^3}; \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0.$

422.

Dipolin (kaksoislähteen) muodostaman vektorikentän potentiaali on

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3},$$

missä $\mathbf{p}$ on vakiovektori. Laske kenttä. Piirrä potentiaalin tasa-arvokäyrät ja kenttä xy-tasossa, kun $\mathbf{p} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

VASTAUS:

423.

Jatkuvasti derivoituva vektorikenttä $\mathbf{u}$ ei ole pyörteetön, mutta kun se kerrotaan jatkuvasti derivoituvalla skalaarikentällä v saadaan pyörteetön kenttä $v\mathbf{u}$. Osoita, että tällöin kentät $\mathbf{u}$ ja $\nabla\times\mathbf{u}$ ovat kohtisuoria.

VASTAUS:

424.

Derivoituva skalaarikenttä $v(\mathbf{r})$ toteuttaa yhtälön $\mathbf{r}\cdot\nabla v = cv$, missä c on vakio. Mikä arvo tulee vakiolla c olla, jotta kenttä $(\nabla v\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}$ olisi konservatiivinen? Määritä sen potentiaali.

VASTAUS:

14.3. Lähteetön vektorikenttä

425.

Osoita vektorikenttä $\mathbf{u}(x,y,z) = x(z-y)\,\mathbf{i}+y(x-z)\,\mathbf{j}+z(y-x)\,\mathbf{k}$ lähteettömäksi ja muodosta sen vektoripotentiaali.

VASTAUS:

426.

Osoita seuraavat vektorikentät $\mathbf{u}(x,y,z)$ lähteettömiksi ja muodosta niiden vektoripotentiaalit:

a) $xy\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-yz\,\mathbf{k}$,
b) $(z-y)\,\mathbf{i}+(x-z)\,\mathbf{j}+(y-x)\,\mathbf{k}$,
c) $x^2\,\mathbf{i}+(x^2y-2xy)\,\mathbf{j}-x^2z\,\mathbf{k}$,
d) $(y+z)\,\mathbf{i}+\sin z\,\mathbf{j}+\cos x\,\mathbf{k}$.

VASTAUS:

427.

Valitse funktio $f(x,y,z)$ siten, että vektorikenttä

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \sin x\,\mathbf{i}+\cos y\,\mathbf{j}+f(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

on lähteetön ja muodosta kentälle vektoripotentiaali.

VASTAUS: $f(x,y,z) = z(\sin y-\cos x)+g(x,y)$,
$\mathbf{A}(x,y,z) = z\cos y\,\mathbf{i}+(-z\sin x+\int g(x,y)\,dx)\,\mathbf{j}$ (esimerkiksi).

428.

Määritä ne funktiot $f(x)$, joilla kenttä $\mathbf{u} = f(x)\,r^n\,\mathbf{r}$ on lähteetön. Laske kentän vuo origoa ympäröivän umpinaisen pinnan läpi, kun $n=-3$ ja $f(x)=1$ kaikilla x.

VASTAUS:

429.

Määritä sellainen skalaarikenttä $v(\mathbf{r})$ ja vektorikenttä $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, että

$$\nabla u+\nabla\times\mathbf{A} = x^2y\,\mathbf{i}+y^2z\,\mathbf{j}+z^2x\,\mathbf{k}.$$

Onko vastaus yksikäsitteinen?

VASTAUS:

430.

Osoita alueessa $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ määritelty vektorikenttä $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$ lähteettömäksi ja laske sen vuo origokeskisen pallopinnan läpi. Osoita Stokesin lauseen avulla, että jos kentällä on vektoripotentiaali alueessa G, niin kentän vuot ylemmän ja alemman puolipallon läpi ovat itseisarvoltaan yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset. Mitä tästä voidaan päätellä vektoripotentiaalin suhteen?

VASTAUS: Vuo $= 4\pi$; vektoripotentiaali ei ole olemassa.

431.

Selosta vektorikentän pyörteettömyyden, lähteettömyyden, konservatiivisuuden, viivaintegraalin tiestä riippumattomuuden, skalaaripotentiaalin olemassaolon ja vektoripotentiaalin olemassaolon väliset yhteydet. Määritä avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ skalaaripotentiaali ja kentän $\mathbf{v}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ vektoripotentiaali.

VASTAUS:

432.

Määritä vakio p siten, että vektorikenttä $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = r^p\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ kolmiulotteisen avaruuden paikkavektori, r sen pituus) on lähteetön. Laske tällä arvolla p kentän vuo origokeskisen R-säteisen pallopinnan läpi. Voidaanko vuo laskea Gaussin lauseen avulla?

VASTAUS: