15. Vektorikentän muodostaminen lähde- ja pyörrekentästä

15.1. Lähteiden synnyttämä vektorikenttä

433.

Pyörteettömän vektorikentän $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ lähdealueena on origokeskinen R-säteinen pallo. Tämän sisäpuolella lähdekenttä on $\rho(\mathbf{r}) = R - r$ ja ulkopuolella siis $\rho(\mathbf{r}) = 0$. Laske kenttä päättelemällä ensin sen muodoksi symmetrian perusteella $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ ja laskemalla sen jälkeen $f(r)$ soveltamalla Gaussin lausetta r-säteiseen palloon. Mikä on kenttävektorin itseisarvon maksimi?

VASTAUS:

434.

Pyörteettömän vektorikentän $\mathbf{u}$ lähdealueena on molempiin suuntiin ääretön R-säteinen ympyrälieriö, jonka sisällä lähdekenttä on $c(R-r)$, missä c on vakio ja r etäisyys lieriön akselista. Määritä kenttä $\mathbf{u}$ sekä lieriön sisä- että ulkopuolella.

VASTAUS:

435.

Pyörteettömän pallosymmetrisen vektorikentän lähdetiheys on $r^{-5/2}$, missä r on etäisyys origosta. Laske pallokoorinaateissa kenttä ja vastaava potentiaali. Osoita, että potentiaali toteuttaa Poissonin differentiaaliyhtälön.

VASTAUS:

436.

Pyörteettömän pallosymmetrisen vektorikentän lähdetiheys on e^{-r}, missä r on etäisyys origosta. Määritä kenttä.

VASTAUS: $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [2 - (r^2 + 2r + 2)e^{-r}]/r^3\ \mathbf{r}$.

437.

Pyörteettömän vektorikentän $\mathbf{u}$ lähdetiheys pallokoordinaateissa on

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r^{2+\varepsilon}}, \quad \alpha, \varepsilon \text{ vakioita, } 0 < \varepsilon < 1.$$

Määritä kenttä ja vastaava potentiaali pallokoordinaateissa sekä osoita laskemalla, että potentiaali toteuttaa Poissonin differentiaaliyhtälön.

VASTAUS:

438.

Origon suhteen pallosymmetrisen lähdekentän ρ synnyttämän pyörteettömän vektorikentän $\mathbf{u}$ potentiaali on

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{aR^3}{3r}, & \text{kun } r > R, \\ \dfrac{a}{6}(3R^2 - r^2), & \text{kun } r \le R, \end{cases}$$

missä a ja R ovat vakioita. Määritä $\mathbf{u}$ ja ρ.

VASTAUS:

439.

Origon suhteen pallosymmetrisen lähdekentän ρ synnyttämän pyörteettömän vektorikentän $\mathbf{u}$ potentiaali on $V = e^{-r^2}$. Määritä $\mathbf{u}$ ja ρ.

VASTAUS:

440.

Origon suhteen pallosymmetrisen lähdekentän ρ synnyttämän pyörteettömän vektorikentän **u** potentiaali on $V = e^{-r^3}$. Määritä **u** ja tutki lähdekentän ρ positiivisuutta ja negatiivisuutta.

VASTAUS:

441.

Origon suhteen pallosymmetrisen lähdekentän synnyttämä potentiaali on $V = -ke^{-r^2}$, missä k on positiivinen vakio. Millä etäisyydellä origosta lähdetiheys on suurin?

VASTAUS:

442.

Pyörteettömän vektorikentän lähdealueena on R-säteinen pallo. Kentän potentiaali pallon sisäpuolisissa pisteissä on $V(r) = 2R - r^3/R^2$, missä r on etäisyys pallon keskipisteestä. Määritä lähdetiheys.

VASTAUS:

443.

Pyörteettömän kentän **u** lähdealueena on xy-tason neliö $0 < x < a$, $0 < y < a$, jossa lähteen pintatiheys on xy. Laske potentiaali V z-akselin pisteissä. Miten suhtautuvat toisiinsa $V(0,0,a)$ ja $V(0,0,-a)$?

VASTAUS:

444.

Pyörteettömän vektorikentän **u** lähdealue on xy-tasossa: $\{\,(x,y,0) \mid 1 < x^2 + y^2 < 5,\ x > 0\,\}$. Lähteen pintatiheys on vakio $= 1$. Määritä kenttä origossa.

VASTAUS:

445.

Pyörteettömän vektorikentän **u** lähdealueena on puolipallon pinta: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$. Lähteen pintatiheys on vakio. Kentän potentiaali olkoon V. Laske $V(0,0,-R) - V(0,0,0)$.

VASTAUS:

15.2. Pyörteiden synnyttämä vektorikenttä

446.

Pyörreviiva, jonka vuo on I, muodostuu y-akselin ja x-akselin positiivisista osista. Edellisellä pyörrekentän suunta on $-\mathbf{j}$, jälkimmäisellä $\mathbf{i}$. Laske syntyvä lähteetön kenttä $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ z-akselin pisteissä.

VASTAUS:

447.

Umpinainen pyörreviiva, jonka pituus on $12a$ ja vuo I, kulkee kuution $\{\,(x,y,z) \mid |x| \le a,\ |y| \le a,\ |z| \le a\,\}$ särmiä pitkin käymällä kaikissa kuution kärjissä paitsi pisteissä (a,a,a) ja $(-a,-a,-a)$. Määritä sen synnyttämä kenttä kuution keskipisteessä.

VASTAUS: $\frac{I}{\pi a\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

15.3. Lähteistä ja pyörteistä syntyvän kentän yksikäsitteisyys

448.

Massapisteen aiheuttamasta gravitaatiokentästä oletetaan, että se on pallosymmetrinen, lähteetön ja pyörteetön massapisteen ulkopuolella sekä häviää äärettömyydessä. Osoita, että kenttä on välttämättä muotoa

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r^2}\mathbf{r}^0,$$

missä α on vakio.

VASTAUS: $\mathbf{u}$ on muotoa $f(r)\mathbf{r}^0$, missä $f(r)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $rf'(r)+2f(r)=0$.

449.

Massapisteen aiheuttaman gravitaatiokentän potentiaali $u(x,y,z)$ toteuttaa massapisteen ulkopuolella *Laplacen differentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

On luonnollista olettaa, että kenttä on pallosymmetrinen, ts. $u(x,y,z)=f(r)$, kun massa sijaitsee origossa. Määritä kaikki mahdolliset potentiaalifunktiot.

VASTAUS: