

Matematiikan verkkokokeiden järjestäminen

Jarno Ruokokoski

7. syyskuuta 2005

Sisältö

1 Johdanto	2
2 Yhteistä ohjelmille	3
2.1 Määritelmiä	3
2.2 Vastauksien syntaksivirheistä	3
2.3 Matematiikan esittämisen ongelmia	3
2.4 Tehtävien satunnaisuus	5
2.5 Muita yhteisiä ominaisuuksia	5
3 WebMathematica	6
3.1 Esittely	6
3.2 Vahvuudet	6
3.3 Heikkoudet	11
4 MapleT.A.	11
4.1 Esittely	11
4.2 Vahvuudet	11
4.3 Heikkoudet	12
5 STACK	14
5.1 Esittely	14
5.2 Vahvuudet	15
5.3 Heikkoudet	17
6 Esimerkkitehtäviä	18
6.1 Pääsälaskutehtäviä	19
6.2 Tehtäviä kynällä ja paperilla	21
7 Yhteenveto	25

1 Johdanto

Kuvitellaan tilanne, jossa Teknisellä korkeakoululla järjestetään matematiikan peruskurssin tentti noin kolmelle sadalle oppilaalle. Kokeen päätyttyä opiskelijat palauttavat paperin kokeen valvojalle, joka vie sen kokeen järjestäjälle. Hän antaa kokeet korjaajille, jotka käyttävät aikaa useita tunteja korjaamiseen. Sitten kokeet laitetaan aakkosjärjestykseen ja annetaan sihteerille, joka arkistoi ja julkaisee tulokset. Opiskelijalla on vielä oikeus käydä valistustilaisuudessa tarkistamassa virheensä ja onko kokeen korjaus ollut oikeudenmukainen hänen paperissaan. Lopuksi kokeet arkistoidaan vuoden ajaksi. Kaikkeen tähän on kulunut muutama viikko, paljon työtunteja ja rahaa.

Tietokone nykyaikaisineen ohjelmineen tarjoaa nyt tai viimeistään muutaman vuoden kuluttua seuraavia helpotuksia tähän tilanteeseen. Opiskelija laskee tehtävän normaalisti kynällä ja paperilla valvotussa tilaisuudessa, mutta kirjoittaa vastauksensa muutaman välivaiheen kera paperin sijasta tietokoneelle. Koneessa on kello, joka ilmoittaa sekunnin tarkkuudella kuinka paljon oppilaalla on aikaa käytettävissään. Kun aika on kulunut umpeen, tai opiskelija on valmis, hän saa tulokset ja palautteen ratkaisusta heti. Niin ikään myös kurssin henkilökunta saa tiedon tuloksista heti varustettuna kaikella tarvittavalla analyysillä, kuten keskiarvoilla ja läpäisyprosentteilla. Kenenkään ei tarvitse huolehtia kokeen korjaamisesta, koska kone tekee sen. Kenenkään ei myöskään tarvitse huolehtia kokeiden siirtelystä ja säilyttämisestä, sillä tulokset tallentuvat automaattisesti tietokantaan. Kuka tahansa oikeudet omaava henkilö voi tarvittaessa saada yhden tai useamman henkilön tulokset näkyviin muutamalla napin painalluksella.

Koneet tarjoavat myös vapaamman tavan tehtävien tekemiseen, jolloin oppilas esimerkiksi tekee tehtäviä itsenäisinä harjoituksina kotonaan. Tällöinkin kone antaa tuloksen ja palautteen heti. Näin oppilaalla on mahdollisuus oppia virheistään ilman osaavan opettajan läsnäoloa.

Tämän erikoistyön aiheena on tutkia millaisia mahdollisuuksia nykyajan ohjelmat tarjoavat tällaisten tilanteiden toteuttamiseen ja hallintaan. Erikoistyö kuuluu Teknillisen korkeakoulun MatTa-projektiin, joka on tietokoneavusteista opetusmateriaalia kehittävä projekti. Työssä painotetaan siksi ohjelmien sopivuutta juuri Teknillisen korkeakoulun olosuhteisiin. Koska oppilaan kynällä ja paperilla saamansa vastaus voi sisältää muuttujia ja muita symboleja, ohjelman täytyy kyetä tulkitsemaan tällaisia vastauksia. Siksi ohjelman ytimen on oltava tähän kykenevä matematiikkaohjelma. Vastauksen saatuaan ohjelma käyttää omia sisäänrakennettuja funktioita sen oikeellisuuden tarkistamiseen ja antaa palautteen.

Tämän erikoistyön tarkoituksena ei ole olla ohjelmien suomennettu käyttöopas. Siksi käyttöohjeet on jätetty hyvin minimiin.

Tutkimus keskittyi kolmen vaihtoehdon ympärille. WebMathematica on Mathematican päälle rakennettu ohjelma [12]. MapleT.A. on Wolfram Researchin kilpailijan Maplesoftin tuote, joka on rakennettu yhtiön matematiikkaohjelma Maplen päälle [9]. STACK taasen on Birminghamin yliopiston tutkimusryhmän laatima ohjelma, joka perustuu pitkälti ilmaisuuteen [6]. Ohjelman ytimenä on Maxima, joka on noin 15 vuotta vanhan kaupallisen Macsyman jälkeläinen [7]. Arviointikriteereinä ohjelmia vertailtaessa oli tehokkuus, ylläpitäjän työn määrä, hinta, nopeus ja ohjelman kyvyt eri asioiden suorittamiseen.

2 Yhteistä ohjelmille

2.1 Määritelmiä

Koska kaikki ohjelmat käyttävät ytimenään matematiikkaohjelmaa, ne kykenevät tehokkaaseen symboliseen laskentaan. Tämä laskentakyky mahdollistaa varsin monipuolisten tehtävien laatimisen Internetiin ja kouluille. Ennen kuin ohjelmia päästään käyttämään, on kuitenkin syytä huomata, että ne vaativat ainakin laatijoilta niin sanotun syötenotaation hallitsemisen. Tässä raportissa syötenotaatiolla tarkoitetaan sitä merkintätapaa, jolla kaava syötetään perinteiseen laskimeen tai tietokoneohjelmaan. Notaatio ei ole kuitenkaan yksikäsitteinen, vaan riippuu käytetystä ohjelmasta. Näin esimerkiksi kaava

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x} dx,$$

on Mathematican syötenotaatiolla `Integrate[Sqrt[x], {x, 0, Pi}]`.

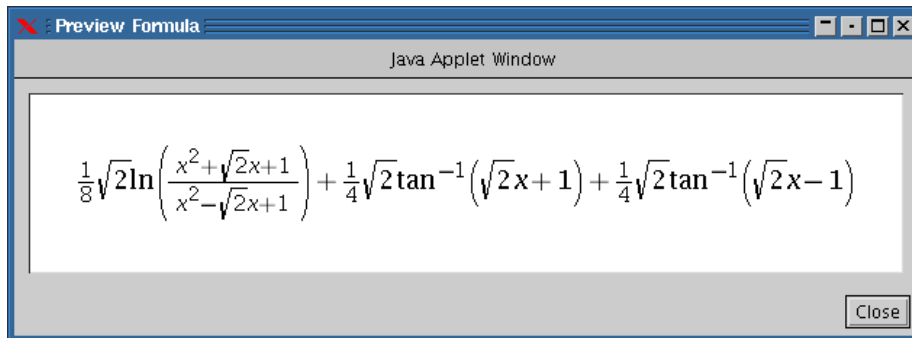
Perinteisestä matematiikan ulkoasusta käytetään raportissa nimitystä standardinotaatio. Laatijoilla tai tekijöillä tarkoitetaan niitä henkilöitä, joilla on oikeudet muokata tehtäviä ja kokeita, kuten opettajaa. Oppilas tai opiskelija tarkoittaa sitä henkilöä, joka tekee kyseisen kokeen tai harjoituksen.

2.2 Vastauksien syntaksivirheitä

Kaikissa tutkituissa kolmessa ohjelmassa oppilaan syöttämän vastauksen on oltava täysin oikein. Näin vastaus, josta puuttuu yksi sulje, on väärin, vaikka se näyttää ihmissilmälle nopeasti katsottuna jopa täysin oikealta. Tämä ongelma on kierretty tutkituissa ohjelmissa siten, että jokaisen annetun syötenotaation voi lähettää koneen tutkittavaksi jo ennen arviointia. Joskin webMathematicaan tämän ominaisuuden saaminen vaatii hieman työtä. Kone näyttää millainen kaava notaatiosta muodostuu standardinotaatiolla. Jos kaava kelpaa opiskelijalle, hän lähettää sen arvioitavaksi vasta sitten. Jos kaava ei näytä halutulta, sitä voi muokata ja toistaa operaatio tarvittaessa. Näin opiskelija ei menetä pisteitään, koska kaavasta puuttui esimerkiksi yksi sulje. Kuva 1 on kaapattu MapleT.A.:n mukana tulevasta kaavojen esikatseluohjelmasta. Kuvan kaavasta näkee helposti esimerkiksi, että $x:t$ eivät ole neliöjuurien sisällä ja niin edelleen.

2.3 Matematiikan esittämisen ongelmia

Kaikki kolme ohjelmaa kykenevät tuottamaan standardinotaatiota opiskelijan selaimen. Jokaisessa tutkitussa ohjelmassa tämä tehdään hieman eri tavoin. Yleisesti voidaan sanoa, että useimmat tällä hetkellä olemassa olevat standardinotaatiota tuottavat ohjelmat perustuvat joko fonttien tai kuvien käyttöön. Fonttimenetelmässä standardinotaatio muutetaan erikoismerkkisarjoiksi, joille on sovittu etukäteen jokin tietty merkitys. Nämä merkitykset on tallennettu selaimiin ja kun ne kohtaavat erikoismerkkisarjoja, joilla ennalta määrätty merkitys, ne korvaavat tämän sarjan vastaavalla matematiikan merkillä, kuten vaikka integraalioperaattorilla tai reaalityyppiä symboloivalla merkillä \mathbb{R} . Ongelma-



Kuva 1: MapleTA:n mukana tuleva kaavojen esikatseluikkuna

na tässä menetelmässä on, etteivät useimmat selaimet osaa lukea näitä erikoismerkkisarjoja oikein. Esimerkiksi fonttimenetelmää käyttävästä ohjelmasta käy STACKissa käytetty TtH [4]. Kuvamenetelmässä standardinotaatio luodaan jossain muualla, kuten vaikka matematiikkaohjelmassa, tallennetaan kuvaksi ja lähetetään selaimelle. Kaikki nykyiset selaimet osaavat näyttää esimerkiksi gif-kuvia, jolloin haluttu standardinotaatio saadaan varmasti näkyviin ja usein vielä varsin siistinä. Ohjelmat käyvät kuitenkin tahmeiksi varsinkin silloin, kun tällaisia kuvia joudutaan luomaan paljon. Kuvamenetelmää käyttää esimerkiksi T_EX4ht [2], jota käytettiin STACKin testiversiossa.

Standardinotaation tuottamisessa eri menetelmillä on siis hyvät ja huonot puolensa. Yksi kunnianhimoinen projekti ratkaista tähän kuuluvat ongelmat on MathML-kuvauskieli [5]. MathML tulee sanoista Mathematical Markup Language ja se on kuvauskieli, jolla voidaan esittää standardinotaatiota nettiselaimissa ja matematiikkaohjelmissa. Kielen tavoitteena on luoda tarvittavat työkalut kansainvälisen selainriippumattoman matematiikkaohjelmiin yhteensopivan standardinotaation tekemiseen. Kieltä ei kuitenkaan tueta tämän päivän selaimissa suoraan, jolloin vaaditaan paljon toimenpiteitä, että saadaan haluttu tulos näkyviin. Kieleen on panostettu paljon ja sillä on tukijoina useita merkittäviä yrityksiä. Todennäköistä on siis, että tulevaisuudessa sen käyttö yleistyy ja helpottuu huomattavasti.

MathML-kieli vaatii käyttäjältään orientoitumista ohjelmointiin ja siihen kuuluvaan ajatteluun.

$$\int_0^1 (x + y) dx$$

kirjoitetaan

```
<math>
  <msubsup>
    <mo>&int;</mo>
    <mn>0</mn>
    <mn>1</mn>
  </msubsup>
</mfenced>
```

```

<mrow>
  <mi>x</mi>
  <mo>+</mo>
  <mi>y</mi>
</mrow>
</mfenced>
<mrow>
  <mo>&DifferentialD;</mo>
  <mi>x</mi>
</mrow>
</math>.

```

Esimerkin koodista näkee kuinka esimerkiksi jokaisella avausmerkinnällä täytyy olla oma /-merkillä varustettu lopetuskomento. Avaus- ja sulkumerkinnöillä varustettuja lohkoja voi olla sisäkkäin, jolloin on oltava tarkkana, että jokainen avattu lohko tulee suljettua. Kovin monimutkaiset rakenteet muuttuvat tämän sisäkkäisyyden vuoksi nopeasti hyvin vaikeasti hallittaviksi. Koodista näkee myös, kuinka jokainen luku täytyy kirjoittaa `mn`-lohkon sisään ja “operaattori” `mo`-lohkon sisään.

Useat matematiikkaohjelmat tuottavat helposti ja nopeasti toimivaa MathML-koodia, jolloin käyttäjä voi selviytyä ilman MathML:n opettelua. Kuitenkin, jos koodia pitää muuttaa, se täytyy luoda aina uudestaan kyseisellä ohjelmalla. Lisäksi ohjelman tuottamassa MathML-koodissa kaikki komennot ovat yhdessä jonossa, jolloin MathML-taitoinenkaan ei osaa välttämättä muokata sitä. On kuitenkin syytä korostaa, että käsintehty ja hyvin sisennetty koodikaan ei ole aina mitenkään lukukelpoista.

2.4 Tehtävien satunnaisuus

Jokaiseen kolmeen matematiikkaohjelmaan on asennettu satunnaislukuja tuottava toiminto. Tätä toimintoa voidaan käyttää kokeiden valmistamisessa siten, että tehtävät sisältävät arvottavia kohtia, jolloin ne muuttuvat jokaisella suorituskerralla erilaisiksi. Lukujen arvontaan voidaan asettaa rajoituksia, jotka estävät tehtävän luonnetta muuttavien lukujen valinnan. Alla olevassa tehtävässä kone arpoo polynomin vakiot jokaisella suorituskerralla väliltä $[-10, 10]$, siten että ne ovat kokonaislukuja. Jos jokin vakio on nolla, tehtävä muuttuu helpommaksi. Tämä ongelma poistetaan asettamalla sen saaminen mahdottomaksi arvonnassa.

$$\int (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx$$

2.5 Muita yhteisiä ominaisuuksia

Kaikissa ohjelmissa on mahdollisuus piirtää funktion kuvaajia kahdessa tai kolmessa dimensiossa. Kuvaajia voidaan asentaa tehtävänantoon kaikissa ohjelmissa. Oppilaalle voidaan antaa myös mahdollisuus piirtää niitä itse MapleT.A:ssa

ja webMathematicassa. Kyky kuvaajien tuottoon ja manipulointiin vaihtelee hieman ohjelmakohtaisesti. Lisäksi ohjelmat muotoilevat tehtävänannon ja vastaukset standardinotaatiolla, jolloin pitkänkin lausekkeen tutkiminen on helppoa.

3 WebMathematica

3.1 Esittely

WebMathematica on Mathematican päälle rakennettu työkalu, joka mahdollistaa Mathematican tehokkaiden operaatioiden käyttämisen selaimessa ennalta määrättyllä tavalla. Oppilas ei pysty itse kutsumaan Mathematicaa, vaan nettisivujen laatija määrää, mitä operaatioita ohjelmassa voidaan tehdä — oppilaan tehtäväksi jää ainoastaan valita mihin funktioon tai dataan tai muuhun vastaavaan nämä operaatiot tehdään. Sivujen tekijällä on kuitenkin käytössään kaikki Mathematican funktiot. Hänen on hallittava HTML ja erikoisesti FORM- ja INPUT-blokit [11] ja ohjelmaa käytettäessä voi tulla myös tarvetta tutustua JSP:hen [3]. WebMathematicaa pystyy käyttämään myös kokeiden ja harjoitustehtävien laatimiseen. Tällöin tekijän on osattava tehdä kokeiden pidossa tarvittava ohjelma, johon kokeet luodaan ja oppilaat rekisteröityvät, joka tallentaa heidän vastauksensa, antaa palautteen vastauksista ja luo tuloksista tilastotietoa. WebMathematican päälle voidaan tehdä myöskin kaupallinen versio, joka sisältää kaiken tämän valmiina. Tällä hetkellä sellaista ei kuitenkaan ole tietoa. Testiluontoinen tehtäväsarja sijaitsee osoitteessa <http://matta.hut.fi/webMathematica/jruokoko/Koe.jsp>. WebMathematicasta käytettiin tässä raportissa versiota 2.1.

3.2 Vahvuudet

Ohjelma ei sisällä valmista käyttöliittymää, vaan se on tehtävä itse. Valmiin käyttöliittymän puuttuminen on toisaalta hyvä, koska tehtävien tekijä voi tehdä liittymästä juuri sellaisen kuin itse haluaa. Toisaalta se on suuri puute, koska liittymän laatiminen vie paljon aikaa ja vaatii hyvää HTML:n tuntemista. Paljon parempi ratkaisu olisi helposti muokattavissa oleva valmis liittymä.

WebMathematican käytössä olevat ominaisuudet mahdollistavat varsin toimivan ja tehokkaan arviointijärjestelmän laatimisen. Ohjelmaan on mahdollista liittää ominaisuuksia, jotka antavat osapisteitä lähes oikeista vastauksista ja järjestelmä voidaan panna reagoimaan oppilaan vastauksiin. Esimerkiksi jos oppilas derivoi integroinnin sijasta, ohjelma voi ilmoittaa että vastaus näyttäisi olevan derivaattafunktio integraalifunktion sijasta. Lisäksi täydelliseen vastaukseen voidaan vaatia esimerkiksi parin välivaiheen merkkäämistä. Nämä ominaisuudet eivät ole kuitenkaan suoraan käytettävissä, vaan kaikki on tehtävä itse ja tekemiseen on varattava paljon aikaa.

Kuvaajien käsittelyssä webMathematica on tutkituista ohjelmista paras. Tehtäväsarjassa on esimerkki kolmedimensioisesta kuvaajasta, johon käyttäjä voi tarttua hiirellä ja pyöritellä sitä. Näin tällaisen kuvaajan analysointi käy helppoksi.

Alla on esitetty mahdollisimman yksinkertaisen ohjelman koodi. Oppilaan tehtävänä on jakaa kolmannen asteen polynomi tekijöihin ja kuvassa 2 on esitetty, millaisena hän tehtävän näkee.

```
<!--Ensimmäiset kaksi riviä ovat välttämättömät
komennot, jotta mathematica toimisi.-->

<% page language="java" %>
<% taglib uri="/webMathematica-taglib" prefix="msp" %>

<HTML>
<HEAD>
  <TITLE>Testikoe</TITLE>
</HEAD>
<BODY text="#000000" bgcolor="#FFFFFF" >
  <H1>Matematiikan koe</H1>

  <!--Komento allocateKernel varaa Mathematican käyttöön.
  Huomioi isot ja pienet kirjaimet ja välilyöntien
  puuttumattomuus.-->

  <msp:allocateKernel>

  <!--Komennon evaluate sisällä voidaan suorittaa
  Mathematican komentoja. Tässä tallennetaan rajat
  nollakohtien suuruudelle.-->

  <msp:evaluate>
    minRand = -10;
    maxRand = 10;
  </msp:evaluate>

  <!--FORM-blokki. Kun painetaan submit-nappulaa,
  kutsutaan actionissa määritettyä tiedostoa.-->

  <FORM action = "TarkastaMallikoe.jsp" method = "post">
  <H2>Tehtävä 1</H2>
  Jaa tekijöihin:
  <BR>

  <!-- Muodostetaan arpomalla kolmannen asteen yhtälö käyttämällä
  tallennettuja ylä- ja alarajoja.-->

  <msp:evaluate>
    eka = Random[Integer, {minRand, maxRand}];
    While[eka == 0, eka = Random[Integer,
      {minRand,maxRand}]];
    toka = Random[Integer, {minRand, maxRand}];
    While[toka == 0, toka = Random[Integer,
      {minRand,maxRand}]];
  </msp:evaluate>
```



```

        kolmas = Random[Integer, {minRand, maxRand}];
        While[kolmas == 0, kolmas = Random[Integer,
            {minRand,maxRand}]];
        yhtalo = (x-kolmas)*(x-toka)*(x-eka);
        MSPFormat[Expand[yhtalo],TraditionalForm]
    </msp:evaluate>
    kun tiedetään että yksi tekijöistä on
    <msp:evaluate>
        MSPFormat[(x-eka),TraditionalForm]
    </msp:evaluate>
    <BR>
    Vastaus:

    <!-- Tallennetaan täällä tehtävän yhtälö. Sitä käytetään
    tarkastuksen yhteydessä.-->

    <INPUT type = "hidden" name = "eka" value =
        "<msp:evaluate>ToString[eka]</msp:evaluate>">
    <INPUT type = "hidden" name = "toka" value =
        "<msp:evaluate>ToString[toka]</msp:evaluate>">
    <INPUT type = "hidden" name = "kolmas" value =
        "<msp:evaluate>ToString[kolmas]</msp:evaluate>">

    <!-- Kenttä johon opiskelija kirjoittaa vastauksen.-->

    <BR>
    <INPUT type = "text" name = "ratkaisu" size = "30">
    <BR>

    <!--Tästä nappulasta kone aloittaa kokeen tarkistuksen-->

    <INPUT type = "submit" name = "submit" value ="Tarkasta">

    <!--Suljetaan FORM ja lopetetaan Mathematican varaus.-->

    </FORM>
    </msp:allocateKernel>
</BODY>
</HTML>

```

Yllä oleva koodi luo tarvittavan tehtävänannon. Kun oppilas kirjoittaa vastauksen ja painaa *Tarkasta*-nappulaa, kone kutsuu FORM-blokissa määriteltyä tiedostoa *TarkastaMallikoe.jsp*. Alla on näytetty mitä tässä tiedostossa on. Kuvasta 3 nähdään, mitä tapahtuu, kun oppilas ilmoittaa vastauksen väärin. Ohjelma ei kommentoi esimerkkiluontoisuuden vuoksi oppilaan vastausta sen enempää.

```

<% page language="java" %>
<% taglib uri="/webMathematica-taglib" prefix="msp" %>

<HTML>

```

```

<HEAD>
  <TITLE>Testikokeen tarkistus</TITLE>
</HEAD>
<BODY text ="#000000" bgcolor="#FFFFFF" >
  <H1>Kokeen tarkistus</H1>
  <msp:allocateKernel>
  <H2>Tehtävä 1:</H2>

  <!-- Hakee alla olevassa blokissa piilotettujen kenttien
  muuttujat ja muodostaa oikean vastauksen.-->

  <msp:evaluate>
    olikoOikein = "false";
    oppilaanVastaus = Null;
    Catch[oppilaanVastaus = MSPToExpression[
      $$ratkaisu],_MSPEException];
    If[oppilaanVastaus == Null,
      oppilaanVastaus = "";
    ];
    MSPBlock[{$$eka,$$toka,$$kolmas},
      oikeaVastaus = (x-$$eka)*(x-$$toka)*(x-$$kolmas);
      If[oikeaVastaus == oppilaanVastaus,
        olikoOikein = "true";
      ];
    ];
  </msp:evaluate>
  Jaa tekijöihin:
  <BR>
  <msp:evaluate>
    MSPFormat[Expand[oikeaVastaus],TraditionalForm]
  </msp:evaluate>
  <BR>
  Oikea vastaus oli:
  <BR>
  <msp:evaluate>
    MSPFormat[oikeaVastaus, TraditionalForm]
  </msp:evaluate>
  <BR>
  <msp:evaluate>
    If[olikoOikein == "true",
      ToString["<B>Tehtävä oikein!</B>"],
      ToString["<B>Tehtävä väärin!</B><BR>Vastauksesi oli:"]
    ]
  </msp:evaluate>

  <!-- Kirjoitetaan vastaus vain jos se oli väärin-->

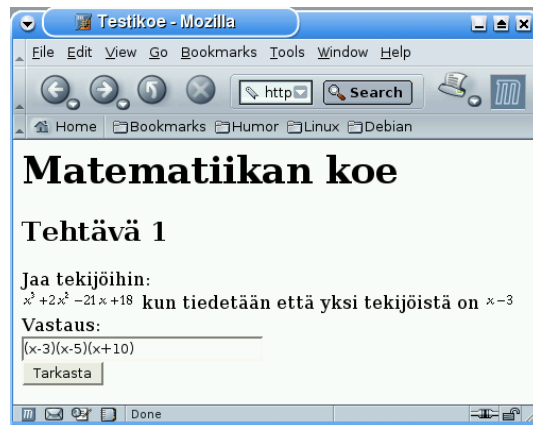
  <msp:evaluate>
    If[olikoOikein == "false",
      MSPFormat[oppilaanVastaus,TraditionalForm]

```

```

]
</msp:evaluate>
</msp:allocateKernel>
</BODY>
</HTML>

```



Kuva 2: webMathematican esimerkkitehtävä



Kuva 3: webMathematican esimerkkitehtävän ratkaiseminen

3.3 Heikkoudet

Suurin heikkous webMathematicassa on muihin tutkittuihin ohjelmiin nähden suuri työmäärä. Lähtökohtaisesti ohjelma ei sisällä mitään valmista — kaikki on koodattava itse. Siksi jo muutamankin tehtävän laatiminen vie paljon aikaa. Toimivan koevalvontajärjestelmän laatiminen vaatii kykyä rakentaa nettiin toimiva tietoa kyselevä ja tallentava tietoturvallinen ohjelma. Sen rakentaminen jää tämän erikoistyon ulkopuolelle.

WebMathematicasta puuttuu mahdollisuus tehdä kaavoja paletteja käyttäen. Näin oppilaan täytyy osata jonkin verran Mathematican omaa notaatiota. Joskin oppilaan ei tarvitse kirjoittaa Mathematican omia funktioita (Sin, Cos) isol-la alkukirjaimella, eikä argumenttien tarvitse olla hakasulkeissa — tavalliset sulkeet käyvät varsin hyvin. Poikkeuksen tästä tekee ainakin luku π , joka on kirjoitettava muodossa Pi.

WebMathematica ei kykene kaikin puolin sujuvaan matematiikan kirjoittamiseen. Esimerkiksi puoliavoimen välin $[-2, 2) \subset \mathbb{R}$ tai lausekkeen, joka ei sellaisenaan tarkoita mitään, kuten esimerkiksi pelkän integraalimerkin kirjoittaminen ei onnistu. Lisäksi kirjoitettuja kaavoja vaivaa pienuus. Varsinkin suuret kaavat menevät helposti suttuisiksi, sillä kaavan koon muokkaaminen ei ainakaan testivaiheessa onnistunut.

4 MapleT.A.

4.1 Esittely

MapleT.A. on nimensä Maple Testing and Assessment mukaisesti juuri kokeiden ja erilaisten tehtävien laatimiseen suunniteltu ohjelma. Valmiina ohjelmana se sisältää muun muassa kokeiden järjestämiseen tarvittavan käyttöliittymän, suuren määrän erilaisia tehtävätyyppejä ja antaa kokeen järjestäjälle suoraan dataa kuten keskiarvoja, ja -hajontoja kokeen tuloksista [10]. Kaksi testiluontoista kymmenen tehtävän MapleT.A.-sarjaa sijaitsee osoitteessa <http://mapleta.comsol.se:8080/classes/tkk/>. Tässä erikoistyössä tutkittiin versiota 2.4. Versio 2.5 julkaistiin äskettäin, mutta tähän erikoistyöhön se ei ehtinyt enää mukaan.

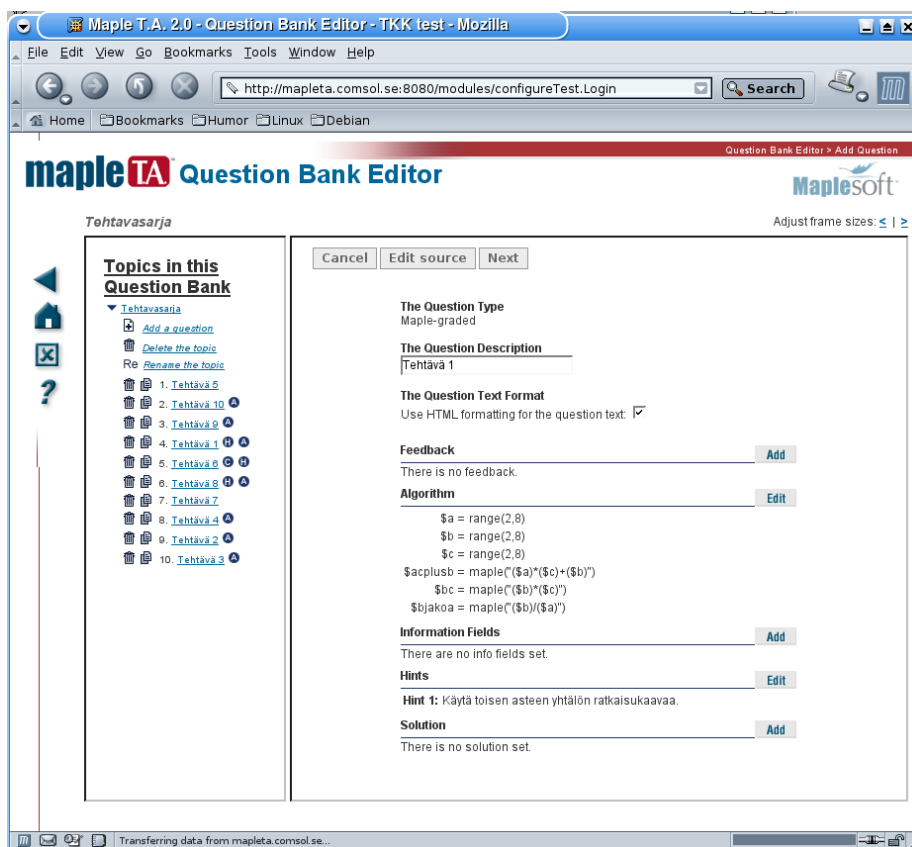
4.2 Vahvuudet

MapleT.A. sisältää editorin, jolla opiskelija voi paletteja ja hiirtä käyttäen muotoilla vastauksessa tarvittavan lausekkeen. Näin hän voi helposti estää huolimattomuusvirheiden syntymisen, eikä hänen tarvitse osata Maplen syötenotaatiota.

MapleT.A. sisältää monipuolisesti erilaisia tehtävätyyppejä. Ohjelmalla voi laatia monivalintatehtäviä yhdellä tai useammalla oikealla vaihtoehdolla, tavallisia lauseketehtäviä, klikkailtavia kuvia, kaavanmuotoilemistehtäviä ja jopa esseitä.

Ohjelma käyttää MathML:ää standardinotaation tuottamiseen [5]. Kaavat ja muut matematiikan merkinnät ovat siksi yleensä siistin näköisiä ja riittävän suuria.

Kuvassa 4 on esitetty ensimmäinen sivu tehtäväeditorista sellaisille tehtäville, joissa oppilas antaa vastauksenaan muuttujia sisältäviä lausekkeita Maplen tulkittavaksi (Maple-graded). Kuvan tehtävä on kynä- ja paperitehtävien tehtävä 1. Palautekohtaan voidaan antaa tietoa, joka annetaan oppilaalle, kun hän on ratkaissut tehtävän. Algoritmikohdassa arvotaan sopivia kokonaislukujuuria toisen asteen polynomille ja lasketaan muodostuneen polynomin termien kertoimet. Vihje-kenttään voidaan laittaa vihjeitä tehtävän suorittamisesta ja pääsääntöisesti ne näkyvät oppilaalle.

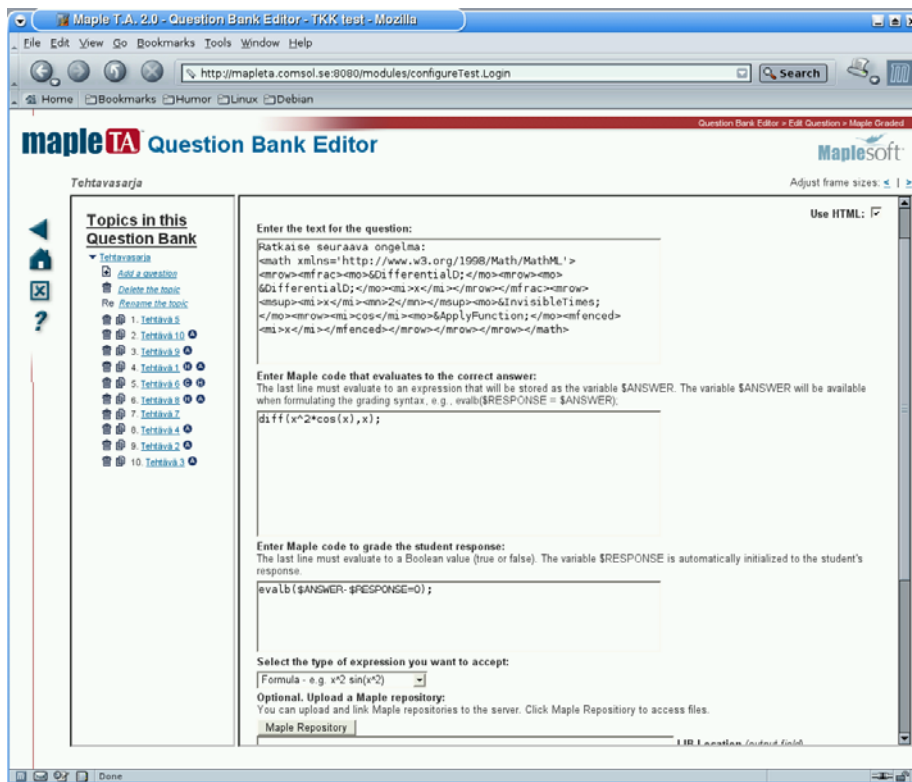


Kuva 4: MapleT.A.:n tehtäväeditori osa 1

Kuvassa 5 on esitetty toinen sivu tehtäväeditorista. Kuva ei ole samasta tehtävästä kuin ensimmäinen sivu, koska näin saadaan monipuolisempi kuva editorin käyttämisestä. Tehtävänantotekstissä oleva MathML-koodi on luotu Maplen omalla algoritmilla. Tehtävänä on derivoida funktiota $x^2 \cos x$.

4.3 Heikkoudet

Koska ohjelma on valmiiksi koodattu, tekijä ei pysty muokkaamaan esimerkiksi ohjelman käyttöliittymää tai lisäämään haluamiaan toimintoja mukaan, vaan hänen on tyydyttävä valmiiseen.



Kuva 5: MapleT.A.:n tehtäväeditori osa 2

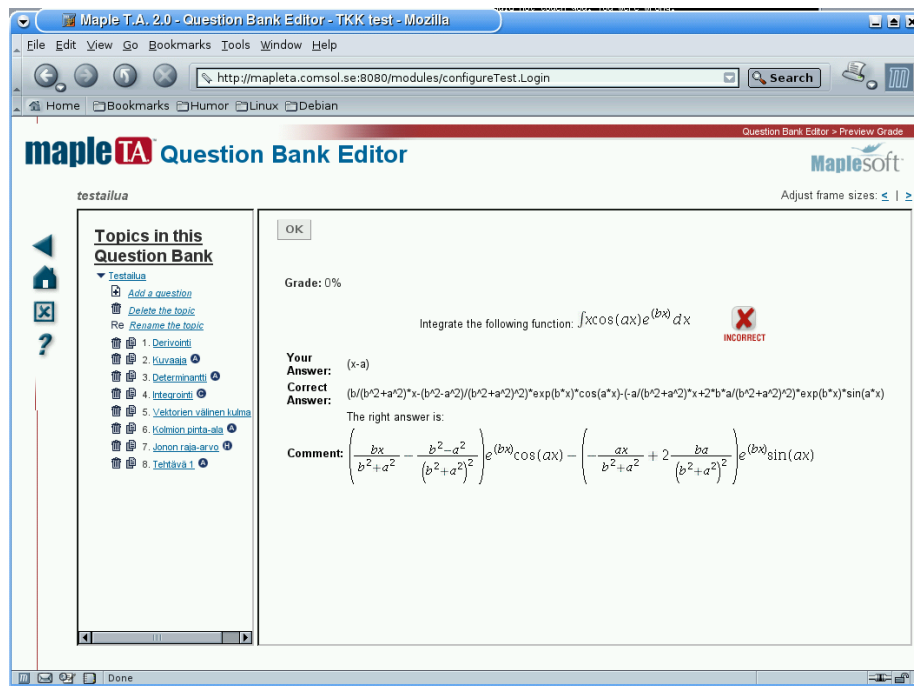
Tehtävien laatimisessa tehtäväsarjojen tallennus on tehty käsittämättömän monimutkaiseksi. Näin tekijä tuhoaa helposti tekemänsä muutokset, ellei ole tarkasti opetellut, kuinka onnistunut tallennus tehdään. Myöskin komennoista käytetyt englanninkieliset painikkeet ovat nimetty joskus harhaanjohtavasti.

Suomenkieliselle MapleT.A:n tehtäväsarjojen laatijalle skandinaaviset merkit aiheuttavat ongelmia. Ohjelma ei osaa esimerkiksi tulkita kovalevyiltä järjestelmään haettujen tehtävien skandinaavisia merkkejä. Näin käy myös, kun tehtäväsarja siirretään oppilaiden käyttöön. Ongelma on mahdollista osin kiertää käyttämällä HTML:n omia tapoja skandinaavisten merkkien käyttöön. Se ei tosin ratkea tällä tavoin täysin, sillä esimerkiksi tehtävien nimissä $\ü$; ja $\ö$; muuttuvat ä:ksi ja ö:ksi tallennuksen yhteydessä jolloin on mahdotonta sanoa, onko nimessä kaikkialla oikein näkyvät merkit. Onneksi tämä ongelma on lähinnä kosmeettinen.

Ohjelma pystyy myös monimutkaisten lausekkeiden käsittelyyn, mutta se ilmoittaa vastauksen käyttäen syötenotaatiota, jolloin vaikea vastaus muuttuu nopeasti lukukelvottomaksi. Tämä ongelma on mahdollista kiertää tallentamalla vastaus Feedback-kenttään, jolloin se kuitenkin tulee typerästi näkyviin kaksi kertaa.

MapleT.A. on huono antaessaan palautetta oppilaiden vastauksiin kahteen muuhun ohjelmaan verrattuna. Vastaus on vain joko oikein tai väärin. Kuvassa 6 on

oppilaan väärin laskeman tehtävän tarkistuksen jälkeinen palautelomake, jossa vastaus näkyy kaksi kertaa, jotta saataisiin selkeäkin vastaus näkviin. Mutta lomakkeessa ei sitten olekaan.



Kuva 6: MapleT.A.:n tehtävän palautelomake

Jos Maple on käytettävissä, sillä voi tuottaa toimivaa MathML-koodia komennolla `printf(MathML:-ExportPresentation(lauseke));`. Saatu koodi voi olla karkeaa, jolloin yksinkertaisempi ja kauniimpi tapa on tehdä varsinkin lyhyet koodit käsin (kuva 5). MapleT.A.sta käsinkin voi kutsua Maplen MathML-työkalua `maple("printf(MathML[ExportPresentation](lauseke))")`-komennolla, mutta tällöin ohjelma hidastuu. MapleT.A.:n omat oppaat opettavat väärän tavan näiden toimintojen käyttämiseen, koska koodiin jää ylimääräisiä lainausmerkkejä.

5 STACK

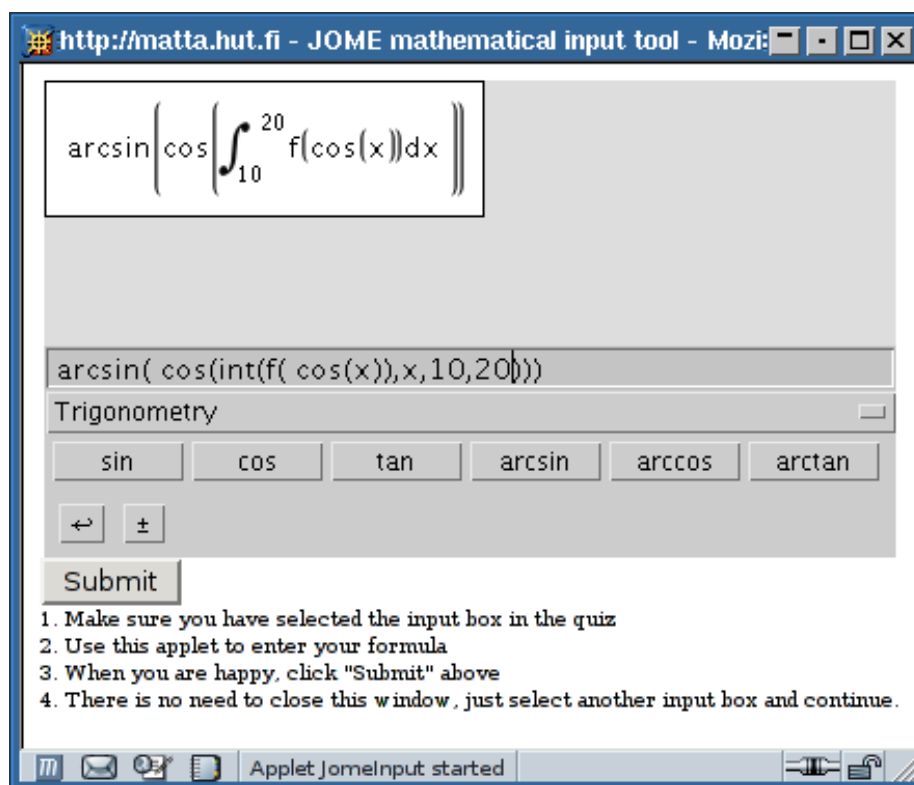
5.1 Esittely

STACK on englantilaisen Birminghamin yliopiston tuote oppilaitoksille, jotka haluavat käyttää ilmaista ohjelmaa kaupallisen sijasta. Ohjelma on Chris Sangwinin johdolla laadittu, ja perustuu ilmaisuuteen. Matematiikkaohjelmanna STACK käyttää ilmaista Maxima. Ohjelman käyttämistä voi opetella helpoiten katsomalla Macsyman oppaista [8]. Käyttöliittymä on rakennettu PHP-scripteillä (<http://www.php.net/>) ja vaatii tuekseen jonkun tietokannan. Ole-

tusarvoisesti Sangwin on käyttänyt MySQL-tietokantaa [1], mutta muutakin kantaa voidaan käyttää, kuten PostgreSQL (<http://www.postgresql.org/>), jota käytettiin testiversiossa. Ohjelma käyttää kuvien piirtämiseen Gnuplotia (<http://www.gnuplot.info/>) ja sähköpostin lähettämiseen opiskelijoille Pear-ohjelmaa (<http://pear.php.net/>). Standardinotaation esittämiseen ohjelmassa käytetään L^AT_EXin notaatiota, joka muutetaan selaimelle sopivaksi fontteja käyttävällä TtH:lla [4]. Testiversiossa käytettiin T_EX4ht:ta [2], koska TtH toimii ilman ylimääräistä fonttien asentelua vain Internet Explorerissa. Kaikki nämä ohjelmat ovat niin ikään ilmaisia. STACKin kotisivuilta löytyy tarvittavia skripptejä ja asennusohjeita [6]. Osoitteessa <http://matta.hut.fi/STACK/> voi käydä kokeilemassa kahta viiden tehtävän esimerkkisarjaa. Sarjoja pääsee tekemään kirjautumalla sisään vierailijana painamalla nappulaa ruudun alareunassa. Tällä hetkellä STACKia ei kehitetä eteenpäin.

5.2 Vahvuudet

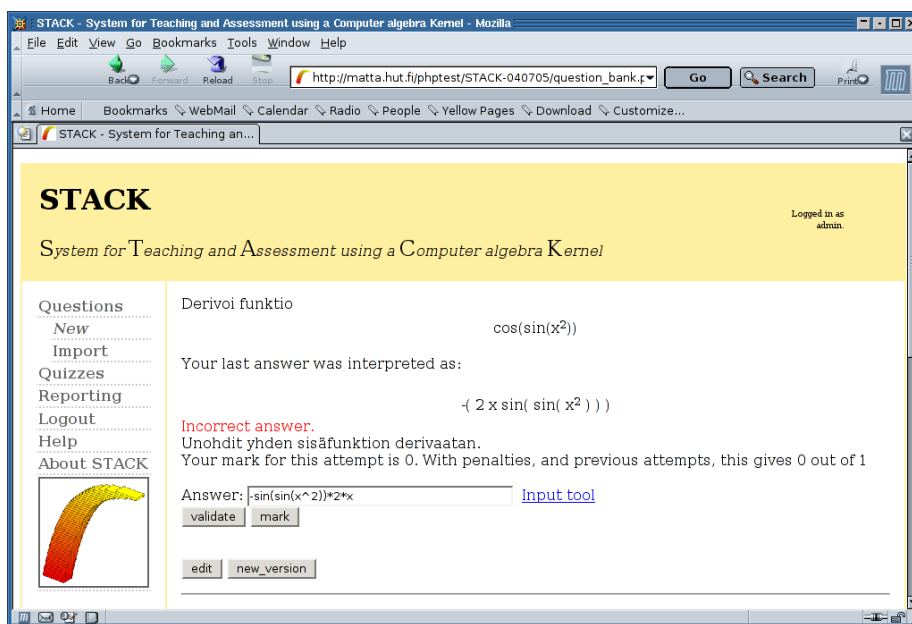
STACK sisältää editorin, jolla kaavoja voi rakentaa paletteja käyttäen, jolloin opiskelijalta ei vaadita syötteiden kirjoittamisen taitoa. Editorin funktiovalikoi-
maa pitää tosin vielä täydentää. Kuva 7 on kaapattu tästä editorista.



Kuva 7: STACK:in kaavaeditori

Erilaisista vääristä vastauksista voidaan antaa varsin monipuolisesti palautet-

ta. Ohjelmassa on sisäänrakennettuja taulukoita joihin mahdollisia kommentteja erilaisista kuvitteellisista vastauksista voidaan syöttää. Näin ohjelma antaa tietyn palautteen vain tietystä vastauksesta. Kuvassa 8 on havainnollistettu tätä. Oppilas on unohtanut yhden sisäfunktion derivaatan laskusta pois ja kone ilmoittaa siitä.

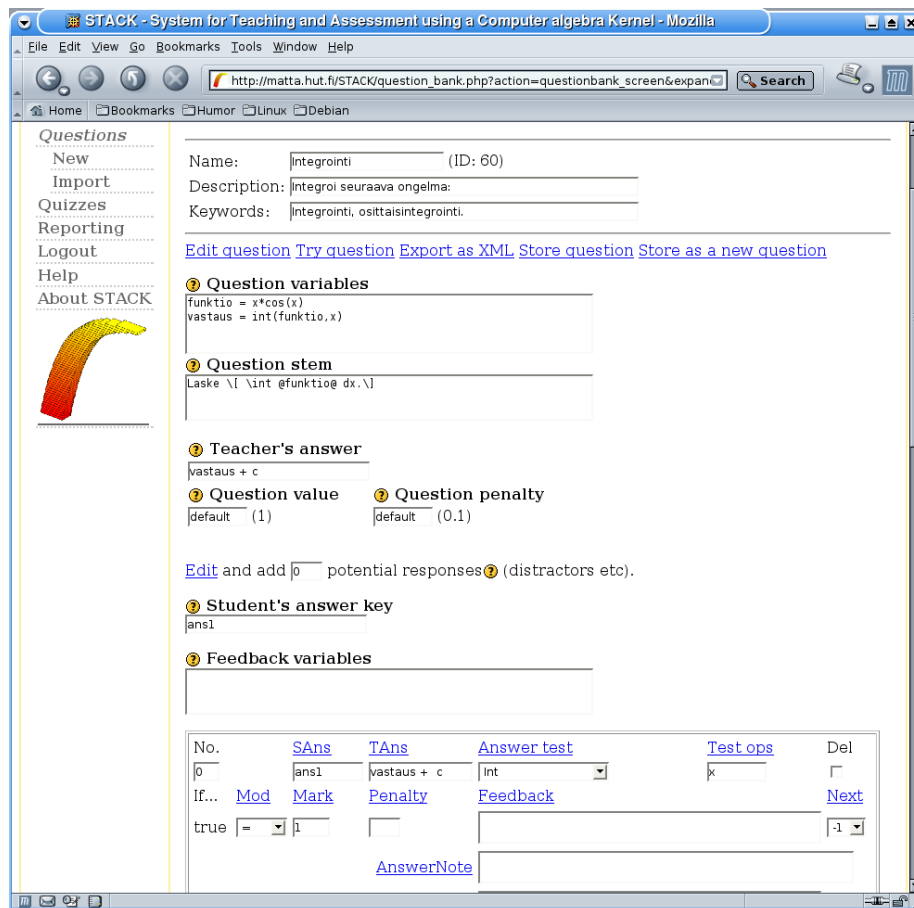


Kuva 8: Oppilas on unohtanut yhden sisäfunktion

Kuvaan 9 on kaapattu STACK:in tehtäväeditorin yläosa. Kuvan tehtävässä pyydetään integroimaan funktio $x \cos x$. *Question variables*-kentässä arvotaan ja luodaan sopivia muuttujia. *Question stem*-kenttään kirjoitetaan opiskelijalle näkyvä kysymys L^AT_EXin notaatiolla. STACKissa on mahdollista antaa opiskelijalle useita kertoja vastauksen syöttämiseen. Jokaisella seuraavalla kerralla tehtävstä saatavasta maksimipistemäärästä vähennetään *Penalty*-kentän määräämä osuus. Esimerkiksi, jos *Penalty* on 0,1 ja opiskelija saa vasta kolmannella kerralla oikean vastauksen, hän saa 70 % tehtävän maksimipisteistä.

Alhaalla näkyvässä laatikossa käytetään *int*-tarkistusmenetelmää. Mentelmä antaa automaattisesti palautetta, jos tehtävästä puuttuu integrointivakio tai oppilas on derivoinut integroinnin sijasta. Muuten väärään vastaukseen kone ilmoittaa, mikä on vastausta vastaava derivaattafunktio. Yleensä näitä laatikoita voi olla niin paljon kuin halutaan. Laatikoissa kone toimii, kuten monimutkaisessa *if*-loopissa. Kun ohjelma "saapuu" laatikkoon, se suorittaa oppilaan (*SAns*) ja opettajan (*TAns*) asettamien arvojen välisen testauksen käyttäen määrättyä testiä (*Answer test*). Jos testi toteutuu, toimitaan *true*-kohdan mukaisesti, muutoin toimitaan *false*-kohdan mukaisesti. *Mark*-kentällä määrätään, paljonko opiskelija saa tällaisessa tilanteessa pisteitä. *Feedback*-kenttään syötetään teksti, jonka opiskelija saa, jos testi "tuo" ohjelman hänen vastauksellaan tähän kohtaan. *Next*-kentässä määrätään, minkä numeroiseen laatikkoon hypätään. -1

katkaisee testauksen kokonaan.

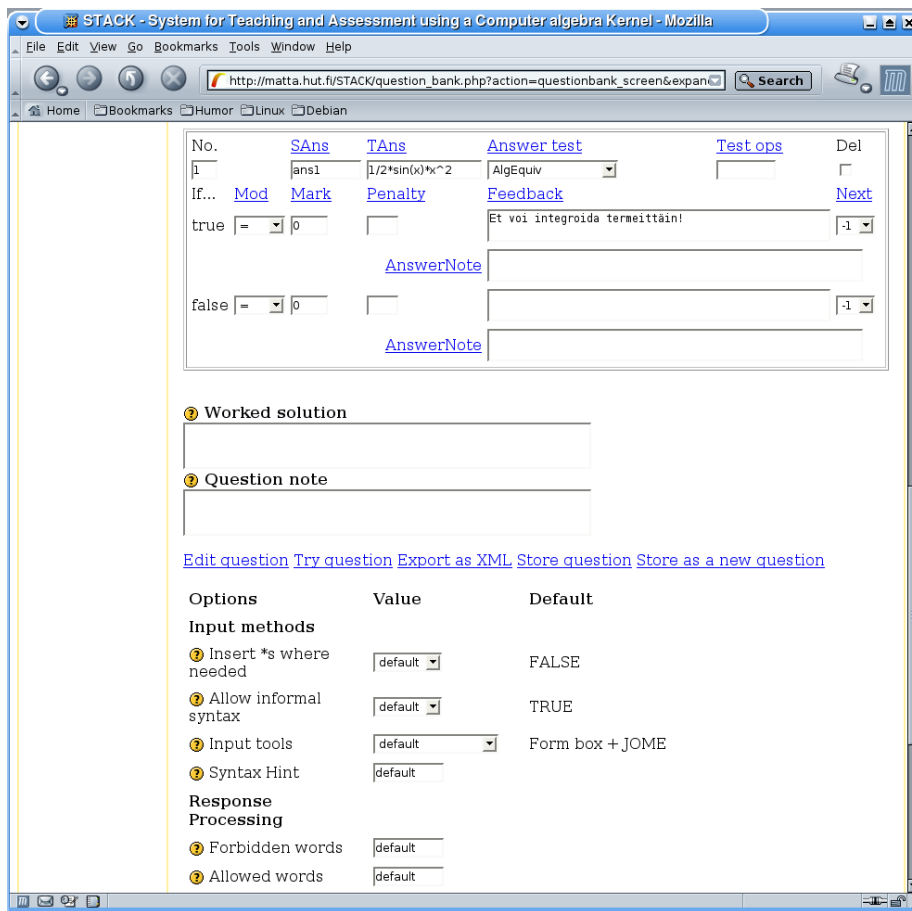


Kuva 9: STACK:in tehtäväeditorin yläosa

Kuvaan 10 on kaapattu STACK:in tehtäväeditorin alaosa samasta tehtävästä. Jos oppilas integroi tekijöittäin, ohjelma toimii tämän kuvan yläosassa näkyvän laatikon mukaan. Tällöin oppilas saa palautteen, ettei hän voi integroida termeittäin ja saa siksi nolla pistettä. Kuvan alalaidassa näkyviin optioihin tehtävän tekijä voi asentaa vaatimuksia vastaukselle. Hän voi esimerkiksi kieltää tiettyjen sanojen käytön, vaatia kertomerkin käyttöä jokaisessa tulossa ja estää oikean vastauksen näkymisen palautetta annettaessa.

5.3 Heikkoudet

Asentaminen voi muodostua ongelmalliseksi. Ohjelma on ilmeisesti suunniteltu pääasiassa Windows-ympäristöön, jolloin ainakin testiasennuksessa Unixille vastaan tuli paljon ongelmia aina versionumeroista alkaen. Ohjelma on paikoitellen vielä lapsen kengissä. Ensimmäistä kertaa tehtäviä tekevälle käyttöliittymä ei



Kuva 10: STACK:in tehtäväeditorin alaosa

ole helppokäyttöinen. Ohjelmassa on paljon omituisia ratkaisuja muun muassa painonappuloiden nimeämisessä. Esimerkiksi edit-nappula on kaikkea mahdollista tehtävän editoinnista sen tallentamiseen asti. Lisäksi help-valikoiden tekstit ovat usein liian suppeita ja olemassa olevaa versiota pahasti jäljessä. Koska testattuun versioon vaihdettiin $\text{T}_{\text{E}}\text{X}4\text{ht}$ generoimaan $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ in koodit kuviksi näyttölle, se on erikoisen hidas, vaikka $\text{T}_{\text{E}}\text{X}4\text{ht}$:ta on optimoitu eri tavoin. $\text{T}_{\text{E}}\text{X}4\text{ht}$:n tuottama jälki on kuitenkin siistin näköistä.

6 Esimerkkitehtäviä

Alle on koottu testauksessa käytettyjen tehtäväsarjojen erilaisia tehtävätyyppejä. Tehtävät ovat vaikeudeltaan sellaisia, että lukion pitkän matematiikan suorittaneen pitäisi selvittää niistä. Kuhunkin ohjelmaan tehtiin kymmenen tehtävän sarja siten, että kahdessa eri sarjassa saattaa olla samoja tehtäviä. Oikean vastauksen alapuolella on kommentteja tehtävästä. Oletusarvoisesti kaikki tehtä-

vät ovat tehtävissä kaikilla kolmella ohjelmalla. Jos näin ei ole, siitä on maininta tehtävän kommentteissa.

6.1 Pääsälaskutehtäviä

Näiden tehtävien ideana on, että oppilas laskee ne päässään. Tehtävät sisältävät useita monivalintatehtäviä. Ainoastaan MapleT.A. soveltuu tällaisiin tehtäviin kunnolla. Muillakin kahdella monivalintatehtävien laatiminen onnistuu, mutta on vähintään kömpelöä.

Tehtävä 1

Paljonko 0.5π on asteina?

- 0.5
- 180
- 45
- $\frac{1}{360}\pi$
- 90

Oikea vastaus on 90° .

Tehtävä 2

Paljonko on $\ln(1)$?

- ∞
- $-\infty$
- 0
- 1
- e

Oikea vastaus on 0.

Tehtävä 3

Mitkä seuraavista funktioista ovat parittomia?

- $\sin x$
- x

- x^2
- $\cos x$
- $\sqrt[3]{x}$

Oikeat funktiot ovat x , $\sqrt[3]{x}$ ja $\sin x$.

Tehtävä 4

Laske vektoreiden $-6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ja $-4\bar{i} - 3\bar{j} + 7\bar{k}$ välinen skalaaritulo eli pistetulo.

Oikea vastaus on 32.

Komponenttien kertoimet arvotaan.

Tehtävä 5

Mikä on funktion $\ln(f(x))$ derivaatta?

- $\frac{f(x)}{f'(x)}$
- $\frac{1}{f(x)}$
- $\frac{1}{f'(x)}$
- $\frac{f'(x)}{f(x)}$
- $f'(x)$

Oikea vastaus on $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Tehtävä 6

Derivoi polynomi $6x^3 + 4x^2 + x - 3$.

Oikea vastaus on $18x^2 + 8x + 1$.

Termien kertoimet arvotaan.

Tehtävä 7

Integroi polynomi $-5x^3 + 7x^2 - 2x + 6$.

Oikea vastaus on $-\frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - x^2 + 6x$.

Termien kertoimet arvotaan.

Tehtävä 8

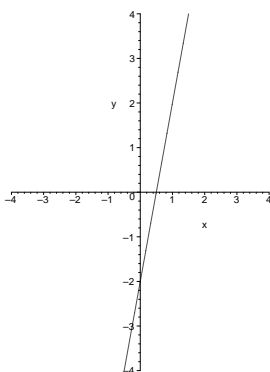
Laske

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

Oikea vastaus on 1.

Tehtävä 9

Määritä kuvaajan suoran kulmakerroin.



Oikea vastaus on 4.

Suoran kulmakerroin ja y -akselin leikkauspiste arvotaan.

Tehtävä 10

Funktion $f : X \rightarrow Y$ sanotaan olevan injektio jos $f(x) \neq f(x')$ aina kun $x, x' \in X$ siten, että $x \neq x'$. Funktion sanotaan olevan surjektio, jos kaikilla $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$. Kuitenkin voi olla $x, x' \in X$ ja $x \neq x'$ siten, että $f(x) = f(x')$. Funktion sanotaan olevan bijektio, jos se on sekä surjektio että injektio. Sen ei kuitenkaan aina tarvitse olla joku näistä. Onko funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, injektio, surjektio, bijektio vai onko se mikään näistä?

Oikea vastaus on, ettei funktio ole mikään näistä.

6.2 Tehtäviä kynällä ja paperilla

Nämä tehtävät on tarkoitettu laskettavaksi paperilla ja kynällä.

Tehtävä 1

Etsi yhtälön $8x^2 - 56x + 48$ juuret. Ne tulee antaa pilkulla erotettuna ilman välilyöntejä.

Oikea vastaus on 1,6.

Juuret arvotaan etukäteen sopiviksi kokonaisluvuiksi.

Tehtävä 2

Sievennä, kun tiedetään, että ainakin osoittajan yksi tekijä on $x + 3$.

$$\frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$$

Oikea vastaus on $\frac{x-2}{x+2}$.

Tekijät on arvottu etukäteen sekä osoittajaan, että nimittäjään. Näin lauseke supistuu varmasti.

Tehtävä 3

Henkilön A täytyy selvittää mahdollisimman nopeasti metsässä sijaitsevalle mökille. Henkilö on tien varressa, josta on 7 kilometriä ensin tietä pitkin ja sitten 3 kilometriä kohtisuorassa tietä vasten suoraan mökille. A:n etenemisnopeus on tiellä $9\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja metsässä $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Laske, missä kohdalla A:n tulisi poiketa metsään. Ilmoita vastauksena paikan etäisyys lähtöpisteestä kilometreissä ilman yksikköä 100 metrin tarkkuudella. Eli, jos vastauksesi on esim. 5466.5890 metriä, ilmoitat vastaukseksi 5.5.

Oikea vastaus on 5.0.

Tässä tehtävässä kaikki etäisyydet ja nopeudet arvotaan siten, että poikkeamis-kohta on positiivinen.

Tehtävä 4

Kolmion sivujen pituudet ovat 8.9 ja 9.5. Sivujen välinen kulma on 57° . Laske kolmannen sivun pituus.

Oikea vastaus on 8.8.

Kaikki annetut luvut arvotaan sopiviksi.

Tehtävä 5

Derivoi

$$\frac{d}{dx} x^2 \cos(x).$$

Oikea vastaus on $2x \cos(x) - x^2 \sin(x)$.

Tehtävä 6

Integroi

$$\int x e^x dx.$$

Oikea vastaus on $(x - 1)e^x$.

Tässä voidaan lisätä haastetta nostamalla x :n potenssia.

Tehtävä 7

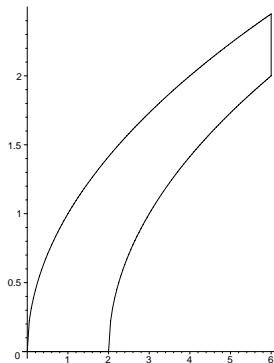
Laske:

$$\sum_{k=10}^{20} 2^k.$$

Oikea vastaus on 2096128.

Tehtävä 8

Käyrät $y = \sqrt{x}$ ja $y = \sqrt{x-2}$ rajaavat yhdessä x -akselin ja suoran $x = 6$ kanssa alueen. Kuinka suuri on sen kappaleen tilavuus, joka muodostuu alueen pyöräyttäessä x -akselin ympäri?



Oikea vastaus on 10π .

Tehtävä 9

Laske vektoreiden $-5\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ ja $7\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k}$ muodostaman kolmion pinta-ala?

Oikea vastaus on $\frac{3}{2}\sqrt{246}$.

Vektorit komponentit arvotaan siten, etteivät vektorit voi olla yhdensuuntaisia.

Tehtävä 10

Laske vektoreiden $-5\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k}$ ja $-5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ välinen kulma kahden merkitsevän numeron tarkkuudella asteina. Anna vastauksesi ilman yksikköä.

Oikea vastaus on 63.

Vektorit komponentit arvotaan siten, etteivät vektorit voi olla yhdensuuntaisia.

Tehtävä 11

Jaa tekijöihin $x^3 - 7x^2 - 84x + 540$, kun tiedetään, että yksi tekijöistä on $x - 6$.

Oikea vastaus on $(x - 10)(x - 6)(x + 9)$.

Tekijöiden nollakohdat arvotaan etukäteen sopiviksi kokonaisluvuiksi.

Tehtävä 12

Etsi polynomien $x^2 - 18x + 70$ nollakohdat.

Oikeat nollakohdat ovat $9 \pm \sqrt{11}$.

Tässä tehtävässä neliöjuuren edessä ja sisällä olevat luvut arvotaan sopiviksi kokonaisluvuiksi. Näin vastaus on aina yllä olevaa muotoa.

Tehtävä 13

Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika on 124000 vuotta. Paljonko 1950 kg:sta ainetta on jäljellä miljoonan vuoden kuluttua. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella kiloissa ilman yksikköä.

Ainetta on jäljellä 7.28.

Puoliintumisaika ja aineen massa arvotaan.

Tehtävä 14

Laske

$$\int x^2 \cos(x) dx.$$

Laita kaksi integroinnin välivaihetta näkyviin. Esitä välivaiheet muodossa $g(x) + \int f(x) dx$ alla oleviin kenttiin. Vasemmalle tulee $f(x)$ ja oikealle $g(x)$. Älä laita integrointivakiota mukaan.

Oikea vastaus on $2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$.

Välivaiheita sisältävän tehtävän voi laatia ainoastaan webMathematicalla.

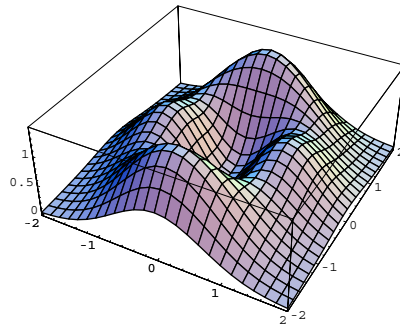
Tehtävä 15

Alla oleva kuvaaja esittää funktiota

$$f(x, y) = (y^4 + x^2)e^{1-x^2-y^2},$$

joka on määritelty kuvan alueella. Määrittele kuvaajan tarkkuudella minkä tyyppinen piste $(1.8, 1.8)$ on? Valitse seuraavista vaihtoehdoista:

1. Satulapiste
2. Paikallinen minimi
3. Paikallinen maksimi
4. Absoluuttinen minimi
5. Absoluuttinen maksimi
6. Ei mikään näistä



Ilmoita vastaukseksi vaihtoehdon numero. Voit tarttua kuvaajaan ja pyöritellä sitä hiirellä.

Oikea vastaus on numero 6.

Tässä tehtävässä valitaan satunnaisesti jokin etukäteen määritellyistä noin kymmenestä pisteestä. Vaikeusastetta voidaan nostaa kysymällä useita pisteitä yhtä aikaa.

Tehtävä 16

Tarkastellaan klassista viiden lippaan ongelmaa. Lippaista yhdessä on yksi kultaraha ja yksi hopearaha, kahdessa kaksi kultarahaa ja kahdessa kaksi hopearahaa. Valitaan täysin satunnaisesti yksi lipas ja siitä umpimähkään yksi raha. Kuinka suuri on todennäköisyys, että lippaaseen jäänyt raha on kultaraha, ehdolla, että nostettu raha on hopearaha?

Oikea vastaus on $\frac{1}{5}$.

Lippaita on 3-5 kappaletta. Jokaista lippaan sisältömahdollisuutta on vähintään yksi. Kuitenkin siten, että lippaita, joissa on yksi molempia rahoja, on aina täsmälleen yksi.

Tehtävä 17

Saata ympyrän yhtälö muotoon $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, kun ympyrän keskipiste on $(7,3)$ ja säde on 7.

Oikea vastaus on $x^2 - 14x + y^2 - 6y + 9$

Ympyrän keskipiste ja säde arvotaan.

7 Yhteenveto

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää mihin olemassa olevat kolme ohjelmaa pystyvät tehtävien ja kokeiden laatimisessa. Tehtyjen tutkimusten perusteella taulukkoon 1 on koottu keskeisimmät ominaisuudet kaikista kolmesta ohjelmasta. On syytä korostaa, että taulukossa WebMathematican kohdalla mainitut

hyvät ominaisuudet ovat toteutettavissa, jos tekijä on taitava ja aikaa on riittävästi. Mitään näistä ominaisuuksista ei ole valmiina.

Ominaisuus	Ohjelma		
	WebMath.	MapleT.A.	STACK
Syötenotaation tarkistus	Kyllä	Kyllä	Kyllä
Standardinotaation teko paaleilla	Ei	Kyllä	Kyllä
Tehtävänanto standardinotaatiolla	Kyllä	Kyllä	Kyllä
2-dimensioiset kuvaajat	Kyllä	Kyllä	Kyllä
3-dimensioiset kuvaajat	Kyllä	Kyllä	Kyllä
Kuvaajien pyörittely hiirellä	Kyllä	Ei	Ei
Oikea vastaus standardinotaatiolla	Kyllä	Kyllä	Kyllä
Väärän tuloksen kommentointi	Kyllä	Ei	Kyllä
Osapisteitys lähes oikeasta tuloksesta	Kyllä	Ei	Ei
Välvaiheiden vaatiminen	Kyllä	Ei	Ei
Ilmainen	Ei	Ei	Kyllä
Työläs käyttää	Kyllä	Ei	Ei
Helposti asennettava	Kyllä	Kyllä	Ei
Vaatii HTML:n tuntemusta laatijalta	Kyllä	Ei	Ei
Vaatii L ^A T _E Xin tuntemusta laatijalta	Ei	Ei	Kyllä

Taulukko 1: Ohjelmien keskeiset ominaisuudet

MapleT.A. soveltuu parhaiten suuren tehtävätyyppivalikoiman ja valmiin kokonaisuuden vuoksi vain monipuolisten, mutta yksinkertaisten tehtävien ja kokeiden laatimiseen. Ohjelmaa ei mielestäni voi käyttää vaikeiden kokeiden pitämiseen, koska se kykenee reagoimaan oppilaan vastauksiin varsin rajatusti.

WebMathematicaa suosittelen niille, jotka haluavat tehdä kaiken itse ja tarvittava osaaminen löytyy. Kuitenkin sillä varauksella, että ohjelmien tekemiseen menee kauan. Ohjelmaa voi käyttää myös paljon muuhunkin — eihän se varsinaisesti mikään opetusohjelma olekaan.

STACK soveltuu parhaiten niille, joilla on taitoa asentamisessa tulevien ongelmien purkamisessa ja silloin, kun ei haluta käyttää rahaa lisensseihin ja niiden päivittämiseen. Ilmaisuutensa vuoksi suosittelen tätä ohjelmaa myöskin TKK:lle. Kuitenkin STACKissa on vielä paljon tehtävää, ennen kuin sitä voi käyttää oikeassa koetilanteessa.

On mielenkiintoista nähdä, mihin suuntaa kehitys tutkituissa ohjelmissa ja koko saralla etenee. Tulevaisuudennäkymät ovat kuitenkin valoisat. Vaikka paljon on vielä kehitettävää, niin moni asia on jo mahdollista tänään. Mielestäni suurimmat ongelmat tämän päivän ohjelmille ovat tehtävistä annettu palaute ja välvaiheiden vaatiminen. Vaaditaan suurta käytännön tuntumaa tekijältä luoda älykästä ja oppilaalle hyödyllistä palautetta antava ohjelma.

Välvaiheet ovat tärkeitä, koska niillä mahdollistetaan pitkät ja vaikeat tehtävät. Näin oppilas, joka osaa laskea puoleen väliin asti, on oikeutettu mielestäni jo puolikkaaseen pistemäärään. Kuitenkin välvaiheet eivät saa ohjata opiskelijaa oikean ratkaisun suuntaan. Esimerkiksi jos opiskelijaa pyydetään ilmoittamaan kynä- ja paperitehtävien tehtävässä 3 käyttämänsä differentiaaliyhtälö,

pyyntö ohjaa opiskelijaa käyttämään differentiaaliyhtälöitä ja derivaatan nol-lakohtia, vaikka tällainen havainto pitäisi tehdä itse. Tällaisten ohjaavuuksien poistaminen ei ole helppoa.

Viitteet

- [1] DAVID AXMARK, MICHAEL WIDENIUS; MySQL; <http://www.mysql.com/>.
- [2] EITAN GURARI; \TeX 4ht; <http://www.cse.ohio-state.edu/~gurari/TeX4ht/mn.html>.
- [3] JASON HUNTER, WILLIAM CRAWFORD; JavaTM Servlet Programming; O'Reilly & Associates, 101 Morris Street, Sebastopol, CA 95472; 1998; lo-kakuu.
- [4] IAN HUTCHINSON; TtH; <http://hutchinson.belmont.ma.us/tth/>.
- [5] PAVI SANDHU; The MathML Handbook; 1 painos; Charles River Media, Inc., Hingham, Massachusetts; 2003.
- [6] CHRISTIAN SANGWIN; Stack 1.0; <http://www.stack.bham.ac.uk/>.
- [7] WILLIAM SCHELTER; Maxima 5.9.1; <http://maxima.sourceforge.net/>.
- [8] Symbolics,Inc.; MACSYMA ® Reference Manual; 1988; marraskuu.
- [9] Waterloo Maple,Inc.:in osasto Maplesoft; Maple 10 ja MapleT.A. 2.5; <http://www.maplesoft.com>.
- [10] Waterloo Maple,Inc.:in osasto Maplesoft; MapleT.A. Getting Started Gui-de; 2004.
- [11] TOM WICKHAM-JONES; webMathematica: A User Guide; Wolfram Re-search, Inc.; 2004; huhtikuu.
- [12] Wolfram Research,Inc.; Mathematica 5.2:n ja webMathematica 2.1:n koti-sivut; <http://www.wolfram.com>.