

Mathematica-tehtäviä (versio 1.0, 09.08.2002)

1.

Trooppisen vuoden pituus on 365 vrk 5 h 48 min 45 s ja Maan pyörähdysaika akselin ympäri 23 h 56 min 4 s. Ilmoita murtolukuna, kuinka monta pyörähdystä Maa tekee trooppisessa vuodessa. Mikä tulos on desimaalilukuna?

2.

Sievennä lauseke $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

3.

Laske summat $\sum_{k=1}^n k^2$, kun $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Jaa tulokset tekijöihin. Ovatko jotkin summat jaottomia, so. alkutekijöitä?

4.

Tutki, millaisia tarkkoja arvoja saadaan lausekkeelle $\sin(\pi/n)$, kun n on luonnollinen luku. Mitä tarkoittaa, että osa tuloksista on (ainakin näennäisesti) kompleksilukuja? Missä tapauksissa tulos ei sisällä imaginaariyksikköä?

5.

Laadi taulukko sini- ja kosinifunktioiden arvoista välillä $0^\circ - 90^\circ$ yhden asteen välein.

6.

Laske lausekkeen $(1 + \frac{1}{n})^n$ likiarvo yhä isommilla arvoilla n ja tutki, miten tämä lähestyy Neperin lukua e .

7.

Laske summan $\sum_{k=1}^n (-1)^k / k!$ likiarvo yhä isommilla arvoilla n ja tutki, miten summan käänteisarvo lähestyy Neperin lukua e .

8.

Kahden paikkakunnan välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna voidaan laskea kaavasta

$$d = R \arccos(\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

missä ϑ_1 ja φ_1 tarkoittavat ensimmäisen, ϑ_2 ja φ_2 vastaavasti toisen paikan leveys- ja pituusatetta. $R = 6370$ km on maapallon säde. Syötä kaava Mathematicalle ja laske sen avulla a) Helsingin ja Tokion, b) Reykjavikin ja Sydneyn välinen etäisyys, kun paikkakuntien koordinaatit ovat seuraavat:

	leveys			pituus	
Helsinki	60° 08'	N		25° 00'	E
Tokio	35° 40'	N		139° 45'	E
Reykjavik	64° 09'	N		21° 58'	W
Sydney	33° 55'	S		151° 10'	E

9.

Sievennä lauseke $\frac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}$.

10.

Talleta lauseke $(a+b)^{10}$ jollekin nimelle ja kehitä se. Jaa tulos tekijöihin, jolloin palataan alkuperäiseen lausekkeeseen.

11.

Jaa tekijöihin kahden muuttujan polynomi

$$x^5 + 2x^4y - x^3y^2 - 2x^2y^3 - x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 + 2y^4.$$

Kehitä saamasi tulos, jolloin palataan alkuperäiseen lausekkeeseen.

12.

Tutki, mikä lauseke on tekijänä lausekkeessa $a^n - b^n$ riippumatta eksponentin $n \in \mathbb{N}$ arvosta. Missä tapauksessa lausekkeella $a^n + b^n$ on vastaavanlainen tekijä? Supista lausekkeet

$$\frac{a^{15} - b^{15}}{a^7 - b^7} \quad \text{ja} \quad \frac{a^{15} + b^{15}}{a^7 + b^7}.$$

Mitä säännönmukaisuutta tuloksen osoittajassa ja nimittäjässä on?

13.

Lavenna murtolauseke

$$\frac{a+x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}$$

siten, että juuria ei esiinny nimittäjässä.

14.

Hajota seuraavat rationaalilausekkeet osamurtokehitelemiksi, joissa nimittäjät ovat ensimmäistä astetta tai ensimmäisen asteen polynomin potensseja:

$$\frac{x}{x^2+5x+6}, \quad \frac{2x+7}{x^3+3x^2+3x+1}.$$

Miten päästään takaisin alkuperäiseen lausekkeeseen?

15.

Muodosta osamurtokehiteelmä lausekkeelle

$$\frac{4696 - 11076x + 11290x^2 - 6227x^3 + 1687x^4 + 180x^5 - 364x^6 + 156x^7 - 36x^8 + 4x^9}{-1152 + 2496x - 2528x^2 + 1616x^3 - 704x^4 + 208x^5 - 40x^6 + 4x^7}.$$

Lisää tämän jälkeen lausekkeen nimittäjään 1 ja muodosta osamurtokehiteelmä uudelleen. Miksi toisessa tapauksessa onnistutaan, toisessa ei?

16.

Kaksi matkapuhelinmastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 5,27 km ja toisesta 3,16 km. Tähtäyssuunnat mastoihin muodostavat $72^\circ 50'$ suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan? Etäisyydet mitataan vaakasuorasti, eikä maaston mahdollisia korkeuseroja oteta huomioon.

17.

Tutki lausekkeiden

- a) $\sqrt{(x-2)^2}$
- b) $\sin(5x)$
- c) $\sin(x+y)$
- d) $\exp(ix) + \exp(-ix)$
- e) $\cos(\arccos x)$
- f) $\arccos(\cos x)$
- g) $\exp(\ln x)$
- h) $\ln(\exp x)$

sieventämistä. Mitä näistä pitäisi tulla? Mitä Mathematica antaa ja millä komennolla? Mitä symbolisen ohjelman itse asiassa pitäisi antaa vastaukseksi, kun muuttujaa x ei ole millään tavoin rajoitettu?

18.

Muokkaa muotoa $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $\sin^n x$, $\cos^n x$ olevia trigonometrisia lausekkeita erilaisiin muotoihin, kun n on jokin luonnollinen luku (ei symboli).

19.

Sievennä Tšebyševin polynomin lauseke $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{N}$, muotoon, josta ilmenee, millainen polynomi on kyseessä. Mikä on polynomin asteluku?

20.

Astetta n olevan polynomin nollakohdat olkoot x_1, x_2, \dots, x_n . Määritä polynomien kertoimien lausekkeet nollakohtien funktioina tapauksissa $n = 2, 3, 4, 5$. Miten polynomin kertoimet riippuvat nollakohdista?

21.

Ratkaise yhtälöiden

- a) $168x = 195$
- b) $x^2 - 2x - 4 = 0$
- c) $x^3 - x^2 + x - 21 = 0$
- d) $(a-b)x^2 + ax + b = 0$

kaikki juuret. Sijoita juuret takaisin yhtälöihin ja tutki, toteutuvatko yhtälöt.

22.

Etsi yhtälön $x^3 - 2x - 5 = 0$ kaikki juuret. Etsi sekä tarkat arvot että likiarvot ja sijoita kummatkin takaisin yhtälöön. Toteutuuko yhtälö?

23.

Etsi yhtälön $x^7 - 2x - 5 = 0$ kaikki juuret. Sijoita jonkin juuren kaksi-, kolmi- ja nelidesimaaliset likiarvot alkuperäiseen yhtälöön ja tutki, millä tarkkuudella se toteutuu. Onko juurille mahdollista löytää tarkat arvot? Kuinka monta reaalista juurta yhtälöllä on? Voidaanko yhtälön toteutumisen tarkkuudesta päätellä juuren likiarvon tarkkuus?

24.

Muodosta toisen asteen yhtälön yleiset ratkaisukaavat ratkaisemalla yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$. Laske $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, missä x_1 ja x_2 ovat saadut juuret. Tarkastele esimerkkinä yhtälöä $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

25.

Johda `Solve`-funktia käyttäen toisen ja kolmannen asteen yhtälön yleiset ratkaisukaavat. Ratkaise näiden avulla yhtälöt $15x^2 + 2x + 12 = 0$ ja $x^3 - 2x - 5 = 0$ sijoittamalla kertoimien arvot ratkaisukaavaan. Syntykö toisen asteen tapauksessa tutut ratkaisukaavat? Antaako kertoimien sijoittaminen ratkaisukaavaan samat juuret kuin yhtälön ratkaiseminen suoraan?

26.

Ratkaise yhtälö $x^3 + 1 = 0$ sijoittamalla kertoimien arvot kolmannen asteen yhtälön yleiseen ratkaisukaavaan. Antaako kertoimien sijoittaminen ratkaisukaavaan samat juuret kuin yhtälön ratkaiseminen suoraan?

27.

Etsi yhtälön $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x - 3 = 0$ juuret. Jaa yhtälön vasempana puolena oleva polynomi näiden avulla mahdollisimman alhaista astetta oleviin reaalisiin tekijöihin. Onko tulos sama kuin `Factor`-funktion antama?

28.

Ratkaise yhtälö $z^7 + 1 = 0$. Esitä juuret muodossa $z = x + iy$ ja tutki, miten kaukana origosta juuret sijaitsevat kompleksitasossa. Mitkä ovat juurten napakulmat?

29.

Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 4x + 5y = 2. \end{cases}$$

30.

Ratkaise yhtälöryhmät

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 10z = 17 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 15 \end{cases}$$

Montako ratkaisua yhtälöryhmillä on?

31.

Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - xy = 10 \\ ax - y = 5 \end{cases}.$$

Millä vakion a arvoilla yhtälöparilla on reaalisia ratkaisuja?

32.

Ratkaise käyrien

$$16x^2 + 9y^2 + 24xy - 170x + 310y - 465 = 0 \quad \text{ja} \\ 5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0.$$

leikkauspisteiden koordinaatit. Vertaa tulosta käyrien kuvaajiin.

33.

Ratkaise yhtälö $e^{-x} - \sin x = 0$. Piirrä tätä varten funktioiden $y = e^{-x}$ ja $y = \sin x$ kuvaajat samaan kuvioon. Määritä kolmen pienimmän juuren likiarvot. Montako juurta yhtälöllä on? Mitä voidaan sanoa näiden ratkaisemisesta a) algebrallisesti, b) numeerisesti?

34.

Etsi yhtälöparin $e^x + \sin y = 0$, $x^6 - xy + y^6 = 4$ juuret numeerisesti.

35.

Osa tien kaarteesta on ympyrän kaari, joka kartalla kulkee xy -koordinaatiston pisteiden $(28, 98)$, $(70, 112)$ ja $(126, 84)$ kautta. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde, kun yksikkö kartalla vastaa 25:tä metriä luonnossa?

36.

Kolmen pallon keskipisteet ja säteet ovat $(1, 1, 1)$, 3; $(1, 2, 3)$, 2; $(3, 2, 4)$, 4. Määritä pallojen yhteiset pisteet.

37.

Kolmannen asteen polynomilla $p(x)$ on kaksinkertainen nollakohta $x = 2$ ja $p(3) = 15$, $p'(1) = 0$. Määritä $p(x)$.

38.

Piirrä funktion $f(x) = \sin 8x + \sin 9x$ kuvaaja.

39.

Tšebyševin polynomit määritellään välillä $[-1, 1]$ lausekkeella

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Piirrä polynomien T_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$, kuvaajat samaan kuvioon.

40.

Piirrä funktion $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 5x$ kuvaaja.

41.

Piirrä funktion $f(x, y) = \arctan(y/x)$ kuvaaja. Miten funktio käyttäytyy origon ympäristössä? Miten funktion voi luonnehtia geometrisesti? Onko funktio jatkuva?

42.

Piirrä kahden muuttujan funktion $f(x, y) = \log_y x$ kuvaaja.

43.

Piirrä kahden muuttujan funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

kuvaaja. Tutki erityisesti funktion käyttäytymistä origon ympäristössä.

44.

Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta käyrästä

$$x = \cos pt, \quad y = \sin qt, \quad t \in [0, 2\pi],$$

missä q ja p ovat numeerisia kertoimia.

45.

Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta kolmiulotteisen avaruuden käyrästä

$$x = (5 + \cos 25t) \cos 5t, \quad y = (5 + \cos 25t) \sin 5t, \quad z = \sin 25t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

46.

Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta kolmiulotteisen avaruuden käyrästä

$$x = (2\pi - t) \cos 5t, \quad y = (2\pi - t) \sin 5t, \quad z = t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Muunna parametriesitystä siten, että saadaan pallopinnalla sijaitseva spiraali.

47.

Piirrä alueessa $-25 \leq x \leq 25$, $-5 \leq y \leq 5$ kuva käyrästä $x = y^3 - 5y^2 + y + 3$ ParametricPlot-funktiolla.

48.

Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta ruuvipinnasta:

$$x = u\left(1 - \frac{v}{8\pi}\right) \cos v, \quad y = u\left(1 - \frac{v}{8\pi}\right) \sin v, \quad z = \frac{1}{5}(v - u), \quad u \in [0, 3], \quad v \in [0, 8\pi].$$

49.

Piirrä origon ympäristössä kuva käyrästä $y^4 + y^2 + xy = x^3 - x$.

50.

Tutki, mitkä xy-tason pisteet toteuttavat yhtälön $\log_y x = \log_x y$. Piirrä kuvio.

51.

Tutki funktion $f(x, y) = y^x$ käyttäytymistä origon ympäristössä alueessa $x > 0$, $y > 0$: piirrä kuvaaja (pinta), piirrä pinnan korkeuskäyriä, laske funktion arvoja. Mitä arvoja funktio saa origoa lähestyttäessä?

52.

Piirrä origon ympäristössä kuva pinnasta $x^3 + y^3 + z^3 - x^2yz - xy^2z - xyz^2 - 1 = 0$.

53.

Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Laske taulukko sen arvoista välillä $[0, 5]$ askelena 0.1. Piirrä funktion derivaatan kuvaaja. Muodosta integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Laske funktion integraali yli reaaliakselin. Katso, mitä antaa komento ?f.

54.

Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ja laske sen arvot pisteissä $x = \pi/2$, $x = 1$ ja $x = 0$. Määrittele tämän jälkeen funktio origossa siten, että siitä tulee jatkuva. Laske uudelleen sen arvo origossa. Piirrä funktion kuvaaja ja kokeile, miten Mathematica tulkitsee syötteen f'[x]. Mitä on f'[0]? Katso, mitä antaa komento ?f.

55.

Määrittele Mathematicalle seuraava funktio ja piirrä sen kuvaaja:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcosh}(-x), & \text{jos } x < -1, \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{jos } -1 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{arcosh} x, & \text{jos } x > 1. \end{cases}$$

Katso, mitä antaa komento ?f. Onko funktio jatkuva? Entä derivoituva? Osaako Mathematica laskea sen derivaatan?

56.

Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| dt.$$

Piirrä tämän määritelmän perusteella funktion ja sen derivaatan kuvaajat.

57.

Fibonaccin luvut määritellään ehdoilla $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$). Määrittele Mathematican funktio, joka laskee Fibonaccin lukuja antamalla määrittelyt $a[0]=1$; $a[1]=1$; $a[n_]:=a[n-1]+a[n-2]$ ja laske tämän avulla Fibonaccin luvut a_{10} ja a_{20} . Muodosta myös taulukko, jossa on 20 ensimmäistä lukua.

58.

Funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ määritellään ehdoilla

$$\begin{aligned} f(n) &= n - 5, & \text{kun } n > 10, \\ f(n) &= f(f(n + 6)), & \text{kun } 1 \leq n \leq 10. \end{aligned}$$

Tutki, mitä arvoja funktio saa.

59.

Olko A ja B äärellisen monen alkion joukkoja. Joukossa A on m alkia ja joukossa B on n alkia. Olkoon $S(m, n)$ surjektioiden $A \rightarrow B$ lukumäärä. Tälle pätee

$$\begin{aligned} S(m, 1) &= 1, \\ S(m, n) &= n^m - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S(m, k), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Muodosta surjektioiden määrän osoittava taulukko, kun $1 \leq m \leq 5$, $1 \leq n \leq 5$. Onko itsestään selvää, mitkä taulukon alkut ovat $= 0$? Miksi? Mitä lukuja ovat taulukon lävistäjäalkut? Osaatko päätellä kaavojen pätevyyden?

60.

Mathematicalle voidaan määritellä myös monimutkaisempia funktioita funktioidenmäärittelyfunktion `Function` avulla. Määrittele funktio f asettamalla

```
f = Function[x, FactorInteger[x][[1, 1]]]
```

ja tutki, mitä se laskee, kun argumenttina on luonnollinen luku.

61.

Derivoi funktiot x^n , x^x , $\sin^4 x + \cos^4 x$. Integroi saamasi tulokset. Päädytäänkö takaisin samaan funktioon, josta lähdettiin?

62.

Integroi funktio x^n . Onko tulos oikein kaikilla n ? Onko samantekevää, jos jollekin symbolille ensin annetaan arvo ja sitten muokataan symbolin sisältävää lauseketta, tai jos ensin muokataan lauseketta ja vasta sitten annetaan symbolille arvo?

63.

Laske funktion $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ derivaatta jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Onko derivaatafunkti jatkuva? Piirrä sen kuvaaja.

64.

Olko f ja g derivoituvia funktioita. Laske tulon ja yhdistetyn funktion derivaatat, so. derivoi lausekkeet $f(x)g(x)$ ja $f(g(x))$.

65.

Olko f , g ja h derivoituvia kahden muuttujan funktioita. Laske yhdistetyn funktion $f(g(x, y), h(x, y))$ osittaisderivaatat. Ovatko saadut lausekkeet sitä, mitä pitäisi?

66.

Etsi funktion e^{-x^2} integraalifunktio. Laske määrättyt integraalit

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \text{ja} \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Määritä näille myös likiarvot. Mitä saatu integraalifunktion lauseke tarkoittaa?

67.

Laske integraalit

$$\text{a) } \int \frac{x+1}{(x^2-x+1)^{10}} dx, \quad \text{b) } \int \ln(1+x^{12}) dx.$$

Ovatko Mathematican antamat tulokset oikein? Miten nämä voisi tarkistaa? Millaista menetelmää pitäisi käsinlaskussa käyttää?

68.

Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12 \cos 2x} dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

69.

Määritä funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$$

integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Onko tämä jatkuva? Pitäisikö sen olla jatkuva? Laske funktion integraali jaksolla $[0, 2\pi]$ yli a) integroimalla analyttisesti komennolla `Integrate`, b) integroimalla numeerisesti komennolla `NIntegrate`, c) muodostamalla ensin integraalifunktio komennolla `Integrate` ja sijoittamalla rajat tähän korvausoperaattoria käyttäen.

70.

Määritä funktion $f(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 10$ nollakohdat, ääriarvopisteet ja käännepisteet. Piirrä kuvaaja.

71.

Käyrä $y = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$, pyörrähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus ja pinnan ala. Parametrisoi pinta ja piirrä se.

72.

Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, x -akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri.

73.

Puutarhuri viljelee tomaatteja, joiden muoto määräytyy kardioidin $r = a(1 + \cos \varphi)$ pyörähtämisestä x -akselin ympäri. Piirrä kardioidi. Laske tomaatin tilavuus. Tuntuuko saamasi tilavuus uskottavalta? Anna vakiolle a jokin lukuarvo ja laske vastaava tilavuuden likiarvo. Piirrä kuvio tomaatista.

74.

Laske kardioidin $r = 1 + \cos \varphi$ kaarenpituus. Piirrä kuvio. Miten saat kardioidin kuvan oikeanmuotoiseksi? Tuntuuko saamasi pituus uskottavalta?

75.

Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t} \mathbf{i} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{j} + \arctan t \mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \rightarrow \infty$.

76.

Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri.

77.

R -säteisen pallon ympäri asetetaan mahdollisimman pieni neliöpohjainen suora pyramidi siten, että pallo sivuaa pyramidin pohjaa ja sivutahkoja. Laske pallon tilavuuden suhde pyramidin tilavuuteen.

78.

Osoita, että käyrän $y = e^{-x} \sin x$ ja x -akselin alueessa $x \geq 0$ rajoittamien alueiden A_0, A_1, A_2, \dots pinta-alat muodostavat geometrisen jonon. Laske integraali $\int_0^\infty |e^{-x} \sin x| dx$.

79.

Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = ax^2$. Suoran kulman kärkeen asetetaan paraabelin normaali. Osoita, että kolmion hypotenuusa leikkaa normaalin samassa pisteessä riippumatta kolmion kahden muun kärjen sijainnista. Määritä leikkauspiste.

80.

Pallon muotoiseen nestesäiliöön, jonka säde on yksi metri, pumpataan nestettä nopeudella 10 litraa sekunnissa. Piirrä kuvaaja, joka esittää nestepinnan korkeutta säiliössä ajan funktiona. Kuinka kauan säiliön täyttäminen kestää? Piirrä nestepinnan korkeuden nousunopeuden kuvaaja.

81.

Muodosta kuusi satunnaislukua, jotka ovat peräisin välien $[-5, -3]$, $[-2, -1]$, $[1, 2]$, $[3, 5]$, $[-0.5, 0.5]$ ja $[1, 2]$ tasaisesta jakaumasta. Näistä neljä ensimmäistä olkoot neljännen asteen polynomin nollakohdat, kaksi viimeistä määrittävät pisteen, jonka kautta polynomin kuvaaja kulkee. Suurimman ja pienimmän nollakohdan välisellä alueella polynomin kuvaaja pyörittää x-akselin ympäri ja muodostaa pyörähdyskappaleen. Laske tämän tilavuus ja pinta-ala; piirrä kuvio.

82.

Osoita, että funktio

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \cos x \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $y'' + y = \tan x$. Luvut C_1 ja C_2 ovat vakioita.

83.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + y = x^2$. Etsi myös alkuehtoa $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ vastaava yksittäisratkaisu.

84.

Etsi yleinen ratkaisu Airyn differentiaaliyhtälölle $y'' - xy = 0$. Mitä ratkaisussa esiintyvät funktiot ovat?

85.

Kesätaapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sinä hetkenä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisuna hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä t . Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?

86.

Lohenviljelyaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalamäärä alkoi vähetä yhtälön

$$P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$$

mukaisesti. Tässä $P(t)$ on kalamäärä hetkellä t , ja aika t on mitattu viikkoina. Kuinka monen viikon kuluttua kaikki kalat olivat kuolleet?

87.

Muodosta funktiolle $f(x) = \exp(\arctan x)$ Maclaurinin polynomeja. Valitse asteluvuiksi ainakin 10, 20, 30, 40 ja 50. Vertaa näiden kuvaajia funktion kuvaajaan. Millä muuttujan arvoilla Maclaurinin sarja näyttäisi suppenevan?

88.

Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^k$$

summa. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja suppenee? Piirrä summafunktion kuvaaja.

89.

Jaa vektori $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ vektoreiden $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

90.

Olko $A = (7, 3)$, $B = (1, 2)$ ja $C = (3, 5)$ tason pisteitä. Muodosta kulman ABC puolittajan suuntavektori ja sen suuntainen yksikkövektori.

91.

Kolmiulotteisen avaruuden taso kulkee pisteiden $A = (7, 3, 1)$, $B = (1, 2, 3)$ ja $C = (3, 5, -5)$ kautta. Laske tason yksikkönormaalivektori.

92.

Vektorit \mathbf{a} , \mathbf{b} ja \mathbf{c} ovat kolmion kärkipisteiden A , B ja C paikkavektorit. Olkoon P sivuille AC ja BC piirrettyjen korkeusjanojen leikkauspiste ja \mathbf{p} sen paikkavektori. Tällöin pätee

$$(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0, \quad (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

Jos voidaan todistaa, että myös $(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, on tullut todistetuksi, että kaikki kolme korkeusjanaa leikkaavat samassa pisteessä. Suorita todistus Mathematican vektorialgebraa käyttäen.

93.

Tarkastellaan avaruuskäyrää $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2}t \mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Piirrä käyrä.

- Muodosta käyrälle parametriesitys, missä parametrina on arvoa $t = 0$ vastaavasta pisteestä parametrin t kasvusuuntaan mitattu kaarenpituus s .
- Määritä käyrältä piste P , joka on käyrää pitkin mitattuna etäisyydellä 2 pisteestä $(1, 1, 0)$ parametrin t kasvusuuntaan. Laske koordinaattien likiarvot ja vertaa kuvaan.
- Laske käyrän kaarevuus ja kierevyys pisteessä P sekä tähän pisteeseen liittyvä kolmikanta $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$.
- Määritä käyrän pisteeseen P liittyvän kaarevuusympyrän keskipiste ja säde.
- Missä pisteessä käyrän kaarevuus on suurimmillaan ja mikä on maksimiarvo? Vastaavatko arvot kuvaa?
- Missä pisteessä käyrän kierevyys on suurimmillaan ja mikä on maksimiarvo?

94.

Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g?