
Formaali logiikka

Luonnollinen logiikka muodostaa perustan arkielämän päättelyille. Sen käyttö on intuitiivista ja usein tiedostamatonta. Mikäli logiikka halutaan täsmällistää — esimerkiksi tietokoneelle ohjelmointia varten — tarvitaan formaalit päättelysäännöt. Näiden muodostamaa kokonaisuutta kutsutaan *formaaliksi logiikaksi*. Käsitteenmuodostusta ohjaa tällöin luonnollinen logiikka; kyseessä on luonnollisen logiikan formalisointi.

Formaalissa logiikassa tarkastellaan lausumia, *propositioita*, joista oletetaan, että ne ovat aina joko *tosia* tai *epätosia*. Tätä kutsutaan logiikan *kaksiarvoisuudeksi*.

Esimerkkejä propositioista ovat 'ulkona sataa (tässä paikassa, tällä hetkellä)'; ' $2 > 5$ '; 'menen kauppaan'. Propositionit voivat myös olla laajempia: 'jos ulkona sataa ja minun täytyy mennä kauppaan, otan auton'. Propositionia sen sijaan eivät ole ' $x > 3$ '; 'oletko lähdössä?'; 'osta se!'.

Propositiologiikka

Propositioista p ja q voidaan johtaa uusia propositioita käyttämällä seuraavia *loogisia operaattoreita* eli *konnektiiveja*:

<i>konjunktio</i> :	$p \wedge q$	' p ja q ',
<i>disjunktio</i> :	$p \vee q$	' p tai q ',
<i>negaatio</i> :	$\neg p$	'ei p ',
<i>implikaatio</i> :	$p \implies q$	' p :stä seuraa q ', ' p jos q ',
<i>ekvivalenssi</i> :	$p \iff q$	' p ja q ovat yhtäpitäviä', ' p jos ja vain jos q '.

Näiden merkitys on pääosin luonnollisen logiikan mukainen. Täsmällinen merkitys ilmenee seuraavasta *totuusarvotaulusta*, missä loogisen operaattorin avulla saadun proposition totuusarvo on määritelty kaikkia propositioiden p ja q totuusarvoja vastaten (1 = tosi, 0 = epätosi).

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \implies q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Erityisesti on syytä huomata disjunktion merkitys: $p \vee q$ tarkoittaa siis ' p tai q tai molemmat'. Kyseessä on siten ns. 'ei-poissulkeva tai'. Luonnollisen logiikan kannalta ei myöskään liene itsestään selvää, että $p \implies q$ on tosi propositiosta q riippumatta, jos p on epätosi. Kyseessä onkin tarkoituksenmukaisuussyistä tehty määrittely; tavoitteena on toimiva kalkyyli.

Eo. määrittelyissä p ja q ovat *atomipropositioita*; konnektiivien avulla muodostetut ovat *johdettuja propositioita*. Mistä tahansa propositioista voidaan muodostaa uusia propositioita yhdistelemällä niitä konnektiivien avulla.

Jos johdettu propositio on tosi riippumatta sen atomipropositoiden totuusarvoista, sitä sanotaan *tautologiaksi*. Esimerkki seuraavassa.

Esimerkki: epäsuora todistus

Olkoon tarkasteltavana johdettu propositio r :

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p).$$

Tämän totuusarvo voidaan selvittää muodostamalla totuusarvotaulu, missä p ja q saavat kaikki mahdolliset totuusarvot:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$	r
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Osoittautuu siis, että propositio r on aina tosi, ts. se on tautologia. Tämä merkitsee, että propositiot $p \implies q$ ja $\neg q \implies \neg p$ ovat joko molemmat tosia tai molemmat epätosia.

Kyseessä on itse asiassa matematiikassa paljon käytetyn *epäsuoran todistamisen* periaate. Luonnollista logiikkaa käyttäen tämän voi esittää seuraavasti:

Jos on osoitettava, että lausumasta p seuraa lausuma q , mutta tämän päättely osoittautuu vaikeaksi, voidaankin tarkastella, mitä tapahtuu, jos q ei ole voimassa. Tutkitaan siis, mitä seuraa lausumasta $\neg q$, ns. *vastaoletuksesta* eli *antiteesista*. Jos tällöin voidaan osoittaa, että $\neg p$ on voimassa, päädytään ristiriitaan, koska alkuperäisessä tehtävässä p on tosi. Lausuma $\neg q$ ei siis voi olla tosi, ts. q on tosi. Alkuperäisen tehtävän $p \implies q$ sijasta tässä siis todistetaan, että $\neg q \implies \neg p$.

Esimerkkinä epäsuoran todistuksen käytöstä olkoon seuraavan lauseen todistaminen:

Ei ole olemassa suurinta alkulukua.

■ alkuluku

Tämä lause on propositio q ; propositio p muodostuu kaikista tunnetuista luonnollisten lukujen ominaisuuksista. Propositio $\neg q$ on tällöin 'on olemassa suurin alkuluku'.

■ luonnollinen luku

Olkoon siis suurin alkuluku olemassa ja tämä olkoon n . Tällöin alkulukuja on äärellinen määrä; nämä ovat $2, 3, 5, 7, \dots, n$. Olkoon $m = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot n) + 1$. Jos tämä jaetaan millä tahansa alkuluvuista $2, 3, 5, 7, \dots, n$, saadaan jakojäännökseksi 1. Koska jako ei mene tasan, on m alkuluku, jolloin se on pienempi tai yhtä suuri kuin suurin alkuluku n ; siis $m \leq n$. Selvästi on kuitenkin $m > n$, jolloin on syntynyt ristiriita luonnollisten lukujen suuruusjärjestykseen nähden.

Predikaattilogiikka

Muotoa ' $x > 5$ ' tai ' x ja y ovat naimisissa' olevat lausumat eivät ole propositionia, koska niiden totuusarvo riippuu siitä, mitä muuttujien x ja y paikalle sijoitetaan. Tällaisia vapaista muuttujista riippuvia lausumia kutsutaan *predikaateiksi* ja niitä merkitään funktioiden tapaan: $p(x)$, $m(x, y)$.

■ funktio

Kun muuttuja(t) *sidotaan*, esimerkiksi niille annetaan arvot jostakin perusjoukosta, predikaatit muuttuvat propositioniksi. Edellisen esimerkin tapauksessa luonnollinen perusjoukko on reaalilukujoukko \mathbb{R} ja asettamalla $x = \pi$ saadaan epätosi propositioni $\pi > 5$. Jälkimmäisessä esimerkissä muuttujan x luonnollinen perusjoukko muodostuu kaikista miehistä, muuttujan y kaikista naisista, jolloin esimerkiksi '(tietty) Pekka ja (tietty) Maija ovat naimisissa' on propositioni, jonka totuusarvo on mahdollista selvittää.

Muuttujat voidaan sitoa myös *kvanttoireilla*, joista tärkeimmät ovat seuraavat:

kaikilla-kvanttori: $\forall x p(x)$ 'kaikilla x on ominaisuus $p(x)$ ',
on olemassa -kvanttori: $\exists x p(x)$ 'on olemassa x , jolla
on ominaisuus $p(x)$ '.

Esimerkiksi sitomalla predikaatti $|x| \geq 0$ kaikilla-kvanttorilla (perusjoukkona reaaliluvut) saadaan propositioni $\forall x (|x| \geq 0)$, joka on tosi.

■ itseisarvo
(reaaliluvun)

■ reaaliluku

Sitomalla predikaatti $x^2 < 0$ on olemassa -kvanttorilla (perusjoukkona reaaliluvut) saadaan epätosi propositioni $\exists x (x^2 < 0)$. Jos perusjoukkona sen sijaan ovat kompleksiluvut, saadaan tosi propositioni.

■
kompleksiluku

Jos predikaatissa on useampia muuttujia, nämä on kaikki sidottava. Esimerkiksi $\exists x \forall y m(x, y)$ on epätosi, kun $m(x, y)$ on predikaatti ' x ja y ovat naimisissa'.

Predikaateille voidaan muodostaa laskusääntöjä. Luonnollisen logiikan pohjalta esimerkiksi seuraavat ovat ilmeisiä:

$$\begin{aligned}\neg \forall x p(x) &\iff \exists x \neg p(x), \\ \neg \exists x p(x) &\iff \forall x \neg p(x), \\ \forall x [p(x) \wedge q(x)] &\iff [\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)], \\ \exists x [p(x) \wedge q(x)] &\implies [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)].\end{aligned}$$

Logiikka ja matematiikka

Logiikkaa voidaan pitää matemaattisen päättelyn — lauseiden eli teoreemojen todistamisen — työkaluna. Yleensä matematiikassa ei kuitenkaan esitetä todistuksia formaalin logiikan muotoon puettuna, vaan pikemminkin sovelletaan luonnollista logiikkaa ja vain tarvittaessa turvaudutaan formaalin logiikan kalkyyliin. Syynä on tradition ohella todistusten luettavuus: tiukka formaalin logiikan käyttö johtaa raskaisiin ja vaikeaselkoisiin esityksiin.

Tietokoneiden tekoälysovelluksissa — joissa myös voidaan pyrkiä lauseiden todistamiseen — formaalin logiikan käyttö sen sijaan on välttämättömyys.

Matematiikka voidaan nähdä järjestelmänä, jonka pohjana ovat *aksioomat*, tosiksi sovitut lausumat. Näiden perusteella johdetaan ainakin periaatteessa logiikan keinoin joukko lauseita, jotka muodostavat tarkasteltavana olevan matemaattisen teorian. Jokainen lause todistetaan joko aiemmin todistettuihin lauseisiin tai suoraan aksioomiin vedoten.

Esimerkiksi reaalisten funktioiden jatkuvuusteorian pohjana voisivat olla aksioomat, jotka määrittelevät reaalilukujoukon. Näihin vedoten voidaan määritellä jatkuvuuden käsite ja logiikkaan pohjautuvalla päättelyketjulla todistaa vaikkapa Bolzanon lause: *Jos jatkuva funktio saa suljetun välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, sillä on ainakin yksi nollakohta tällä välillä.*

Modernin geometrian pohjana eivät enää ole Eukleideen antiikin Kreikassa esittämät aksioomat vaan näiden modernimpi versio, jota yleensä kutsutaan *Hilbertin aksioomiksi* saksalaisen matemaatikon David Hilbertin (1862 – 1943) mukaan. Geometrioitakin on erilaisia; näitä vastaavat erilaiset aksioomajärjestelmät.

Sovellusten kannalta matemaattinen teoria on malli, joka jollakin tavoin kuvaa sovellusta, reaalimaailman ilmiötä. Malli ei ole sama asia kuin ilmiö vaan lähes aina yksinkertaistus, jonka pätevyydellä on rajoituksensa.

Periaatteessa voidaan ajatella, että kaikki matematiikka rakennetaan yhden aksioomasysteemin varaan ja tältä pohjalta johdetaan jokainen matemaattinen teoria määrittelemällä uusia käsitteitä ja todistamalla näitä koskevia lauseita. Näkemystä kutsutaan usein *bourbakistiseksi* 1930-luvulla syntyneen salanimeä Nicolas Bourbaki käyttäneen ranskalaisen matemaatikkoryhmän mukaan. Ryhmä on julkaissut joukko-opillisista perusteista lähtenyt 20. vuosisadan matematiikan yleisesitystä, joka ei kuitenkaan ole saavuttanut alkuperäisiä tavoitteitaan.

Luontevampaa onkin nähdä aksiomaattisen menetelmän merkitys rajoitetummin: kullakin matematiikan osa-alueella on oma aksioomasysteeminsä, johon tulokset perustetaan. Silti hyvinkin erilaisilla alueilla on yllättäviäkin kosketuskohtia. Sovellusaloilla ei toisaalta välttämättä tarvitse olla edes kovin tietoinen aksiomaattisesta perustasta.

■ aksiooma

■ funktio
(reaali-)

■ jatkuvuus

■ Bolzano

■ geometria

■ geometria

■ Eukleides

■ Hilbert

■
matemaattinen
malli■
matemaattinen
malli

■ joukko-oppi