

Area-funktiot

1/3

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio

KATSO MYÖS: ■ arcus-funktiot

■ Sisältö

■ Hakemisto

Area-funktioiden määritelmät

Hyperbelisini on aidosti kasvava funktio $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sillä on tällöin käänteisfunktio $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tätä merkitään arsinh ; luetaan yleensä latinan tapaan *area sinus hyperbolicus*. Siis:

$$y = \operatorname{arsinh} x \iff x = \sinh y.$$

Hyperbelikosini on aidosti kasvava bijektio vain, jos sen määrittelyaluetta sopivasti rajoitetaan: $[0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$. Tällöin sillä on käänteisfunktio *area cosinus hyperbolicus* $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$,

$$y = \operatorname{arcosh} x \iff x = \cosh y.$$

Määrittelyalue voitaisiin yhtä hyvin rajoittaa funktion aidosti vähenevään osaan: $] - \infty, 0] \rightarrow [1, \infty[$. Tätä vastaten saadaan myös käänteisfunktio, jota kutsutaan funktion *sivuhaaraksi*. Sen arvot ovat päähaara-arvojen vastalukuja: $-\operatorname{arcosh} x$.

Hyperbelitangentti on aidosti kasvava bijektio $\mathbb{R} \rightarrow] - 1, 1[$, jolloin sillä on käänteisfunktio $\operatorname{artanh} :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$y = \operatorname{artanh} x \iff x = \tanh y.$$

Vastaavaan tapaan voidaan menetellä myös hyperbelikotangentin suhteen.

Nimitys *area* tarkoittaa erästä pinta-alaa; vrt. hyperbolisten ja trigonometrysten funktioiden vertailuun. Tämän johdosta funktionnimien alkuosan tulee olla ar eikä arc, vaikka jälkimmäistäkin toisinaan näkee. Minkään kaaren (arcus) pituuteen ei funktioiden arvoja nimittäin voida luonnollisella tavalla liittää.

■ kasvava
(funktio)

■ kasvava
(funktio)

■
käänteisfunktio

■
käänteisfunktio

■ bijektio

■ vähenevä
(funktio)

■ vähenevä
(funktio)

■ hyperbeli- ja
trigonometriset
funktiot

Area-funktiot

2/3

■ Sisältö

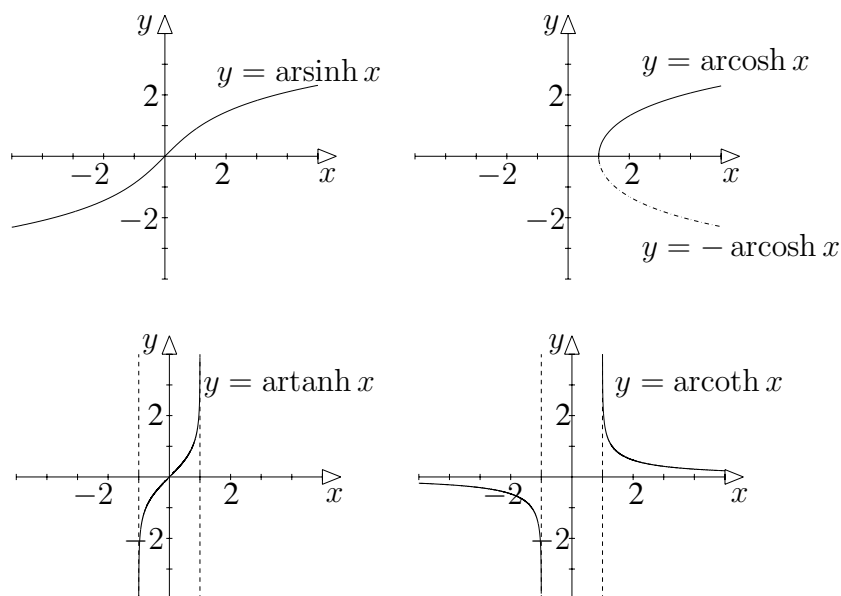
ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmfunktio

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ arcus-funktiot

Area-funktioiden kuvaajat

Area-funktioiden kuvaajat ovat seuraavan näköiset:



Area-funktiot

3/3

■ Sisältö

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ arcus-funktiot

Area-funktioiden lausuminen logaritmin avulla

Koska hyperbelifunktiot ovat aina lausuttavissa eksponenttifunktion avulla, voidaan area-funktiot esittää logaritmin avulla.

■ eksponentti-funktio

Ratkaisemalla y yhtälöstä $x = \sinh y$ saadaan $y = \operatorname{arsinh} x$. Toisaalta voidaan eksponenttifunktion avulla kirjoittaa

■
logaritmifunktio

$$x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \quad \text{eli} \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0,$$

mikä on toisen asteen yhtälö tuntemattomana e^y . Tämän ratkaisu on $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Miinusmerkki ei kelpaa, koska tällöin saataisiin negatiivinen arvo eksponenttifunktiolle. Siis $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

■ yhtälö (toisen asteen)

On siis saatu esitys

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1,$$

ja

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$