

## Lukujonon raja-arvo

ESITIEDOT: ■ lukujonot

KATSO MYÖS: ■ funktion raja-arvo, ■ Neperin luku  $e$

1/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkki lukujonon raja-arvosta

Lukujonossa  $a_1, a_2, a_3, \dots$  (jossa on äärettömän monta termiä) voivat luvut lähestyä jotakin arvoa, kun jonossa edetään yhä pidemmälle. Tätä arvoa kutsutaan lukujonon *raja-arvoksi* ja merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Esimerkkinä olkoon rekursiivisesti määritelty jono

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} + a_n - \frac{1}{4}a_n^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

jonka termeillä on seuraavia arvoja:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.0, \\ a_1 &= 1.25, \\ a_2 &= 1.359375, \\ a_3 &= 1.39739990234375, \\ a_4 &= 1.409218280576169, \\ a_5 &= 1.412744239998656, \\ a_6 &= 1.413782668086311, \\ a_7 &= 1.414087309940999, \\ a_8 &= 1.414176579906956, \\ a_9 &= 1.414202730117622, \\ a_{10} &= 1.414210389649588, \\ a_{11} &= 1.414212633101378, \\ a_{12} &= 1.414213290195495, \\ a_{13} &= 1.414213482654103, \\ a_{14} &= 1.414213539023941, \\ a_{15} &= 1.414213555534286, \\ a_{16} &= 1.414213560370054, \\ a_{17} &= 1.414213561786418, \\ a_{18} &= 1.414213562201261, \\ a_{19} &= 1.414213562322766, \\ a_{20} &= 1.414213562358354 \end{aligned}$$

Nämä näyttäisivät lähestyvän lukua  $\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$ . Itse asiassa näin onkin.

■ rekursiivisesti  
määritelty  
lukujono

## Lukujonon raja-arvo

ESITIEDOT: ■ lukujonot

KATSO MYÖS: ■ funktion raja-arvo, ■ Neperin luku  $e$

2/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Lukujonon raja-arvon määritelmä

Raja-arvon täsmällinen määrittely merkitsee edellä mainitun lähestymisen käsitteen täsmentämistä ja tekemistä riippumattomaksi siitä, miten nopeasti luvut raja-arvoa lähestyvät.

Vaativuutena on, että asetetaanpa miten pieni etäisyyskynnys tahansa, luvut  $a_n$  tulevat tätä etäisyyttä lähemmäksi raja-arvoa  $a$ , kunhan vain jonossa edetään kyllin pitkälle.

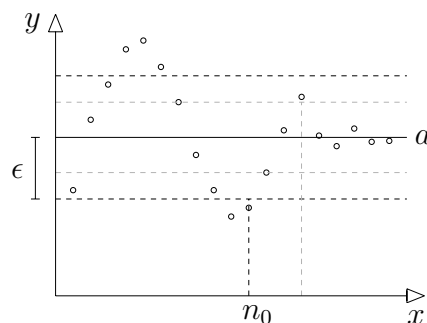
Mitä pienempi etäisyyskynnys asetetaan, sitä pidemmälle jonossa yleensä on edettävä, mutta jokaista etäisyyskynnystä kohden löydetään jonosta kohta, josta eteenpäin luvut ovat kynnyksarvoa lähempänä raja-arvoa.

Toisin sanoen: Jokaista etäisyyskynnystä  $\epsilon (> 0)$  vastaa indeksiraja  $n_0$  siten, että  $|a_n - a| < \epsilon$ , kun  $n > n_0$ .

Itseisarvolauseke  $|a_n - a|$  on tässä syytä mieltää lukujen  $a_n$  ja  $a$  väliseksi etäisyydeksi lukusuoralla.

■ itseisarvo  
(reaaliluvun)

■ lukusuora



Määritelmä on pätevä myös kompleksilukujen tapauksessa. Erotuksen itseisarvo voidaan nimittäin mieltää pisteiden  $a_n$  ja  $a$  väliseksi etäisyydeksi kompleksitasossa.

■ kompleksiluku  
■ itseisarvo  
(kompleksiluvun)

**Lukujonon suppeneminen ja hajaantuminen; raja-arvo  $\infty$** 

Jos lukujonolla on eo. määritelmän mukainen raja-arvo, sen sanotaan *suppenevan* eli *konvergoivan*. Vastakohtana on jonon *hajaantuminen* eli *divergoiminen*. Tällöin jonolla ei ole määritelmän mukaista äärellistä raja-arvoa. Hajaantuvia jonoja ovat esimerkiksi  $a_n = 2^n$  ja  $a_n = (-1)^n$ .

Jos lukujono karkaa äärettömyyteen, ts. jonon luvut tulevat miten suuriksi tahansa jonossa edettäessä (esimerkiksi  $a_n = 2^n$ ), merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

ja sanotaan jonon raja-arvon olevan 'ääretön'. Jonoa sanotaan tällöin siis hajaantuvaksi eikä sillä merkinnästä huolimatta ole raja-arvoa eo. määritelmän mielessä.

Vastaavasti määritellään merkintä  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

## Lukujonon raja-arvon laskeminen

Raja-arvojen laskeminen pohjautuu määritelmän perusteella 'itsestään selviin' tuloksiin sekä summan, erotuksen, tulon ja osamäärän raja-arvoa koskeviin lauseisiin. Lisäksi on syytä tuntea eräitä 'standardiraja-arvoja' (käsittely edempänä), jotka voidaan perustella suoraan määritelmän avulla, vaikkakaan ei aivan yksinkertaisesti.

Itsestään selviä, oikeastaan suoraan määritelmiin palautuvia tuloksia ovat ennen muuta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Tietty varovaisuus 'itsestään selvydessä' on kuitenkin paikallaan. Erityisesti on huomattava, että jos lauseke näyttäisi rajaprosessissa saavan muodon  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$  tai  $1^\infty$ , sen raja-arvosta *ei tämän perusteella voida päätellä mitään*. Varsinkin viimeiseksi mainittu on syytä huomata: Esimerkiksi Neperin luku  $e = 2.718 \dots$  saadaan raja-arvona  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ , mikä muodollisesti laskien antaa  $1^\infty$  ja siis johtaa kiusaukseen päätellä raja-arvoksi 1.

■ Neperin luku

Raja-arvon laskemisen suhtautuminen laskutoimituksiin ilmenee seuraavista kaavoista, joissa oletetaan, että raja-arvot  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  ovat olemassa:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) &= c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (c \text{ vakio}); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}. \end{aligned}$$

Osamäärää koskevassa kaavassa tulee luonnollisesti nimittäjien olla  $\neq 0$ .

### Esimerkkejä lukujonojen raja-arvoista

1) Tyypillinen esimerkki eo. kaavojen käytöstä on seuraava lasku, missä on itse asiassa käytetty jokaista kaavaa ja palautettu näiden avulla raja-arvon laskeminen yksittäisten termien raja-arvoihin ja lopulta 'itsestään selvyteen'  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ :

$$\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 4n + 7} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}.$$

2) Toisinaan on lauseke kirjoitettava sopivaan uuteen muotoon raja-arvon määrittämiseksi. Koska lauseke  $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$  saa muodon  $\infty - \infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , ei raja-arvosta voida suoraan päätellä mitään. Laventaminen lausekkeella  $\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}$  johtaa kuitenkin tulokseen:

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{(n^2 + n) - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Oikeastaan tässä on myös käytetty neliöjuurifunktion jatkuvuutta. (Missä kohdassa?)

■ laventaminen

■ neliöjuurifunktio

■ jatkuvuus

Raja-arvoja voi luonnollisesti tutkia myös laskemalla numeerisesti jonon lukuja. Tällä tavoin voi usein selvittää ainakin sen, mikä luku raja-arvo *ei* ainakaan ole. Tiettyä varovaisuutta on kuitenkin noudatettava, koska numeerisessa laskennassa aina tapahtuvat pyöristysvirheet voivat aiheuttaa katastrofaalisesti vääriä tuloksia. Ks. esimerkkiä Neperin luvusta edempänä.

## Lukujonon raja-arvo

ESITIEDOT: ■ lukujonot

KATSO MYÖS: ■ funktion raja-arvo, ■ Neperin luku  $e$

6/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Lukujonojen standardiraja-arvoja

Seuraavat raja-arvot voidaan todistaa määritelmään perustuen. Todistukset eivät kuitenkaan ole aivan lyhyitä. Vrt. vastaaviin funktioiden standardiraja-arvoihin.

■ raja-arvo  
(standardi-,  
funktion)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{jos } 0 \leq a < 1; \\ 1, & \text{jos } a = 1; \\ \infty, & \text{jos } a > 1; \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \text{missä } a > 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Esimerkkinä pyöristysvirheiden numeerisessa laskennassa aiheuttamista ongelmista ovat seuraavat edellä esitetystä jonosta lasketut Neperin luvun likiarvot:

■ Neperin luku

$$n = 10, \quad a_n = 2.59374246;$$

$$n = 10^4, \quad a_n = 2.71814592;$$

$$n = 10^7, \quad a_n = 2.71828169;$$

$$n = 10^{10}, \quad a_n = 2.71828205;$$

$$n = 10^{13}, \quad a_n = 2.71611003;$$

$$n = 10^{16}, \quad a_n = 1.00000000.$$

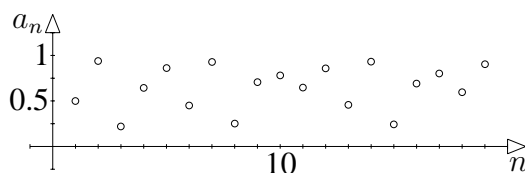
Oikea arvo on  $e = 2.71828183\dots$ , joten edellä olevassa listassa likiarvot ensin paranevat ja sitten huononevat, kunnes lopulta päädytään täysin vääriin arvoihin. Selitys on käytetyssä laskentatarkkuudessa, joka on noin  $2 \cdot 10^{-16}$ . Kun  $n \geq 10^{16}$ , pyöristyy luku  $1 + 1/n$  luvuksi 1, jonka mikä tahansa potenssi on  $= 1$ . Kuudentoista numeron laskentatarkkuuskaan ei siis riitä kovin hyvien likiarvojen laskemiseen Neperin luvulle.

## Alaraja-arvo ja yläraja-arvo

Rekursiivisesti määritelty lukujono

$$a_1 = 0.5, \quad a_{n+1} = ra_n(1 - a_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

missä  $r = 3.75$ , on esitetty oheisessa kuvassa. Vaaka-akselilla on indeksi-arvot, pystyakselilla jonon lukujen arvot.



Ilmeisestikään jono ei suppene, mutta pysyy rajoitettuna välille  $[0, 1]$ . Yksittäiset luvut riippuvat voimakkaasti ensimmäisen luvun valinnasta eikä jonossa ole havaittavissa jaksollisuutta. Tämän johdosta sen sanotaan käyttäytyvän *kaotiivisesti*.

Koska jono kuitenkin pysyy rajoitettuna, voidaan kysyä, millä välillä sen luvut raja-arvomielessä ovat. Tällöin johdetaan alaraja-arvon ja yläraja-arvon käsitteisiin. Olkoon  $m_p$  suurin mahdollinen alaraja niille luvuille, joiden indeksi on  $\geq p$ , ja  $M_p$  pienin mahdollinen yläraja samoille luvuille. Näitä merkitään

$$m_p = \inf_{n \geq p} a_n, \quad M_p = \sup_{n \geq p} a_n.$$

Symbolit  $\inf$  ja  $\sup$  ovat lyhenteitä sanoista *infimum* ja *supremum*.

Voidaan todistaa, että lukujonoilla  $m_1, m_2, m_3, \dots$  ja  $M_1, M_2, M_3, \dots$  on aina (jonon  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ollessa rajoitettu) olemassa raja-arvot. Näitä kutsutaan *alaraja-arvoksi* ja *yläraja-arvoksi* (*limes inferior* ja *limes superior*); merkinnät

$$\lim_{p \rightarrow \infty} m_p = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} M_p = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Havainnollisesti sanoen jonon luvut kasautuvat ala- ja yläraja-arvon väliselle alueelle. Jos jono suppenee, ala- ja yläraja-arvo yhtyvät jonon raja-arvoksi.

■ rekursiivisesti  
määritelty  
lukujono