

Geometriset kuvaukset

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ piste, ■ koordinaatistot
KATSO MYÖS: ■ tangentti ja normaali, ■ kompleksiluvut

1/7

■ Sisältö
■ Hakemisto

Geometrinen kuvaus

Geometriseksi kuvaukseksi kutsutaan funktiota, jonka lähtöjoukkona ja samoin maalijoukkona on tasogeometriassa koko taso ja avaruusgeometriassa koko kolmiulotteinen avaruus.

Kuvaus liittää jokaiseen lähtöjoukon pisteeseen P jonkin maalijoukon pisteen P' . Merkitään $P' = F(P)$, missä F on kuvauksen nimi.

Kuvaus F voidaan ilmoittaa kertomalla, miten kuvapisteen P' suorakulmaiset koordinaatit (x', y') lasketaan, kun argumenttipisteen P koordinaatit (x, y) tiedetään; avaruudessa vastaavasti (x', y', z') ja (x, y, z) :

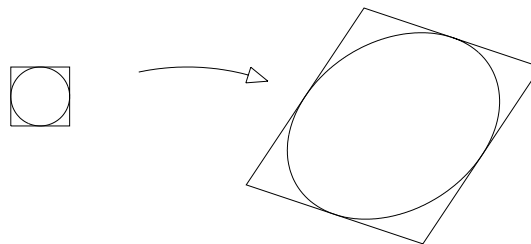
$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y); \end{cases} \quad \begin{cases} x' = f_1(x, y, z), \\ y' = f_2(x, y, z), \\ z' = f_3(x, y, z). \end{cases}$$

Geometrisen kuvion kuvautuminen määritetään periaatteessa pisteittäin: lasketaan kuvion jokaisen pisteen kuva erikseen.

Tasotapauksessa kuvaus voidaan esimerkiksi määritellä yhtälöillä

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$$

Tässä jokainen suora kuvautuu suoraksi ja esimerkiksi ympyrän kuva on ellipsi:

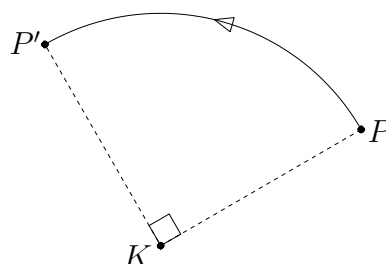


■ suora
■ ympyrä
■ ellipsi

Kuvaukset voivat olla monimutkaisempiakin eikä suoran välttämättä tarvitse kuvautua suoraksi, vaan tuloksena voi aivan hyvin olla jokin käyrä.

Kuvaus voidaan toisaalta määritellä myös synteettisen geometrian käsittein. Esimerkiksi pisteen P kuvaksi asetetaan piste, joka saadaan kiertämällä tätä 90° positiiviseen suuntaan pitkin ympyräviivaa, jonka keskipisteenä on kiinteä piste K .

■ geometria
(synteettinen)



Geometriset kuvaukset

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ piste, ■ koordinaatistot

KATSO MYÖS: ■ tangentti ja normaali, ■ kompleksiluvut

2/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

Euklidiset kuvaukset: siirto ja kierto

Geometrisia kuvauksia, jotka säilyttävät kuvattavan geometrisen kuvion muodon, kutsutaan *euklidisiksi kuvauksiksi*. Näitä ovat *siirto*, *kierto*, *peilaus* ja *skaalaus* sekä näistä yhdistämällä saadut kuvaukset.

Esimerkiksi vektorigeometriaa käyttäen voidaan kuvauksille johtaa lausekkeet, missä kuvapisteen P' koordinaatit (x', y') tai (x', y', z') lausutaan pisteen P koordinaattien (x, y) tai (x, y, z) avulla.

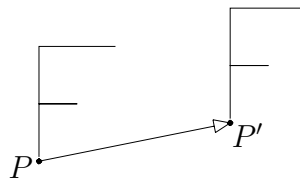
■ funktio

■ kuvaus

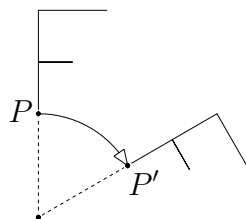
■ yhdistetty funktio

■ geometria (vektori-)

- Kuvaus on *siirto*, jos pisteen P kuvapiste P' saadaan siirtämällä pistettä P annetun matkan annettuun suuntaan.



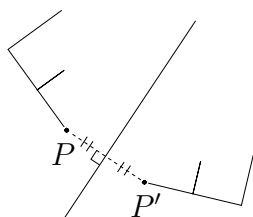
- Kuvaus on *kierto*, jos tasotapauksessa kuvapiste P' saadaan kiertämällä pistettä P annetun kulman verran annetun pisteen, *kiertokeskuksen* ympäri. Jos kyseessä on kierto kolmiulotteisessa avaruudessa, kiertokeskus on korvattava suoralla, *kiertoakselilla*.



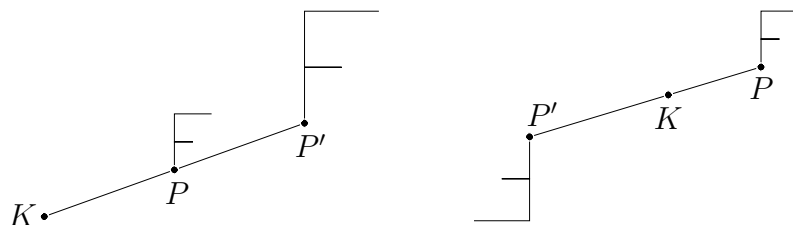
Jatkuu

Euklidiset kuvaukset: peilaus ja skaalaus

- Kuvaus on *peilaus*, jos kuvapiste P' asetetaan pisteen P kanssa symmetriseen asemaan annetun suoran suhteen. Avaruustapauksessa suora on korvattava tasolla.



- Kuvaus on *skaalaus* keskuksena annettu piste K , jos kuvapiste P' asetetaan samalle pisteestä K alkavalle säteelle kuin piste P ja etäisyyksille pätee $|KP'| = \alpha|KP|$, missä α on *skaalaussuhde*. Jos $\alpha < 0$, asetetaan P' vastakkaiselle puolelle keskusta K kuin P .



Geometriset kuvaukset

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ piste, ■ koordinaatistot
KATSO MYÖS: ■ tangentti ja normaali, ■ kompleksiluvut

4/7

■ Sisältö
■ Hakemisto

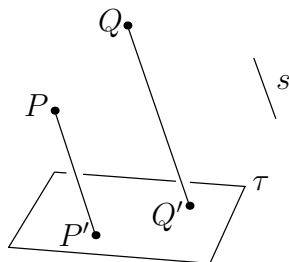
Projektiokuvaukset

Projektiokuvauksissa lähtöjoukkona on kolmiulotteinen avaruus ja maalijoukkona jokin tämän taso. Kun kolmiulotteisen avaruuden kuvion tai kappaleen jokin piste kuvataan tällaisella kuvauksella, saadaan kuvion tai kappaleen *kuva* kaksiulotteiseen tasoon. Tasoa sanotaan tämän johdosta *kuvatason*.

■ funktio
■ kuvaus
■ lähtöjoukko
■ maalijoukko

Projektiokuvauksia on kahta tyyppiä: *yhdensuuntaisprojektioita* ja *keskusprojektioita*.

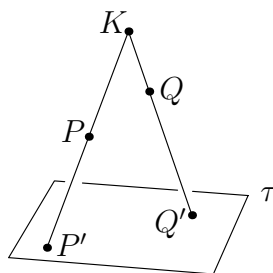
Yhdensuuntaisprojektiossa täytyy kuvatason lisäksi olla annettuna *projektiosäteiden suunta*. Tämä ei saa olla kuvatason suuntainen. Pisteen P kuvapistettä P' löydetään asettamalla pisteen P kautta *projektiosäde*, so. suora, jolla on em. suunta, ja määrittämällä piste, jossa projektiosäde leikkaa kuvatason.



Jos projektiosäteet ovat kohtisuorassa kuvatason vastaan, puhutaan *ortogonaaliprojektioista*; jos näin ei ole, projektiio on *vino*.

■ projektiio

Keskusprojektiossa tarvitaan kuvatason lisäksi kiinteä piste, *projektiokeskus* K , joka ei saa olla kuvatassossa. Pisteen P kuvapistettä P' on projektiosäteen KP ja kuvatason leikkauspiste. Aivan kaikille avaruuden pisteille P ei tällä tavoin kuvapistettä löydetä: Jos säde KP on kuvatason suuntainen, ei leikkauspistettä luonnollisestikaan ole.



Geometriset kuvaukset

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ piste, ■ koordinaatistot
KATSO MYÖS: ■ tangentti ja normaali, ■ kompleksiluvut

5/7

■ Sisältö
■ Hakemisto

Aksonometria; perspektiivikuvat

Yhdensuuntaisprojektiolla muodostettuja kuvia sanotaan *aksonometrisiksi kuviksi*. Tunnetuin esimerkki on *kavaljeeriprojektio*, jossa kuvatasona on yz-taso ja projektiosäteiden suunta on hieman vinossa x-akseliin nähden; kyseessä ei siis ole ortogonaaliprojektio. Toinen merkittävä aksonometria on *dimetrinen ortogonaaliprojektio*, jota käytetään varsinkin teknisen suunnittelun havainnekuvin.

Keskusprojektiolla muodostetut kuvat ovat *perspektiivikuvia*.

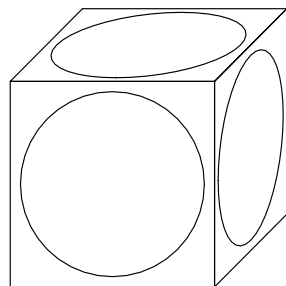
Ihmissilmä ja kamera muodostavat kuvia likimain keskusprojektion periaatteella. Tämän johdosta perspektiivikuvat näyttävät varsin luonnollisilta. Aksonometriset kuvat näyttävät usein tietyllä tavoin venähtäneiltä, sitä enemmän, mitä vinommasta aksonometriasta on kyse. Niiden etuna on kuitenkin — ainakin ollut käsinpiirtämisen kautena — helpompi konstruoitavuus.

Yhdensuuntais- ja keskusprojektion määritelmien perusteella voidaan johtaa synteettisen geometrian säännöt, joilla projektiokuvat on piirrettävä. Tällöin puhutaan *deskriptiivisestä geometriasta*. Toisaalta esimerkiksi vektorialgebraa käyttäen voidaan projektiolle johtaa myös laskukaavat, joita käyttäen kuvien tekeminen tietokoneella tulee mahdolliseksi.

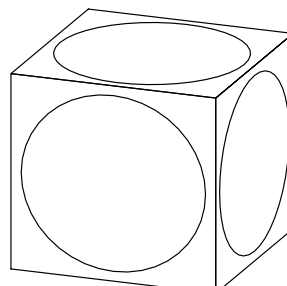
■
koordinaatisto
(xyz-)

■ geometria
(synteettinen)

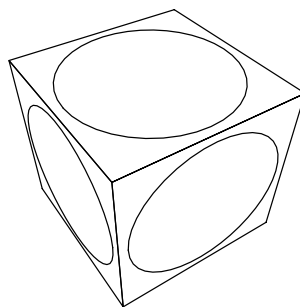
■ geometria
(vektori-)



kavaljeeriprojektio



dimetrinen ortogonaaliprojektio



keskusprojektio

Mandelbrotin joukko

Sellaiset tason kuvaukset itseensä, joiden lausekkeet ovat ns. *epälineaarista* tyyppiä, saattavat johtaa varsin mutkikkaisiin kuvioihin. Näitä kutsutaan usein *fraktaaleiksi*. Tunnettu esimerkki on *Mandelbrotin joukko*.

■ kuvaus

Kuvaus F , joka synnyttää Mandelbrotin joukon, esitetään yleensä kompleksilukujen avulla: $w = F(z) = z^2 + c$, missä c , z ja w ovat kompleksilukuja. Ajattelemalla kompleksiluvut z ja w tason pisteiksi se voidaan kuitenkin tulkita kuvaukseksi tasosta tasoon.

■ joukko

■ kompleksiluku

■ kompleksitaso

Itse asiassa jos $z = x + iy$, $w = x' + iy'$ ja $c = a + ib$, niin yhtälö $w = F(z)$ voidaan hajottaa reaali- ja imaginaariosaan:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + a, \\ y' = 2xy + b. \end{cases}$$

Tässä on siis kyse kuvauksesta, jossa pisteen (x, y) kuvapiste (x', y') lasketaan eo. kaavoilla.

Mandelbrotin joukko määritellään seuraavasti:

Muodostetaan jono tason pisteitä siten, että seuraava piste z_{n+1} eli (x_{n+1}, y_{n+1}) lasketaan aina edellisen pisteen z_n eli (x_n, y_n) avulla:

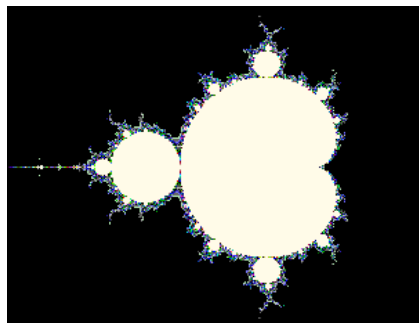
$$z_{n+1} = F(z_n) = z_n^2 + c \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b. \end{cases}$$

Aloituspisteenä on origo $z_0 = 0$ eli $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ja ensin lasketaan piste z_1 , ts. (x_1, y_1) soveltamalla edellä olevia kaavoja arvolla $n = 0$. Seuraava piste z_2 eli (x_2, y_2) saadaan tämän jälkeen asettamalla $n = 1$, jolloin kaavojen oikealle puolelle sijoitetaan z_1 eli (x_1, y_1) . Näin jatketaan.

Pistejonon käyttäytyminen riippuu kompleksiluvusta (pisteestä) c eli (a, b) . Jos jono karkaa äärettömyyteen, tämä piste ei kuulu Mandelbrotin joukkoon. Jos pistejono sen sijaan pysyy rajoitetulla alueella (itse asiassa origokeskisessä ympyrässä, jonka säde on $= 2$), piste (a, b) kuuluu Mandelbrotin joukkoon.

Tuloksena on varsinkin reunoiltaan häkellyttävän monimutkainen kuvio. Mistään säännöllisestä reunakäyrästä ei voida puhua. Kuviota suurennettaessa havaitaan, että samat (tai samankaltaiset) yksityiskohdat kertautuvat yhä pienemässä mittakaavassa. Kuvio seuraavassa.

■ käyrä (taso-)

Mandelbrotin joukon kuva

Kuvissa Mandelbrotin joukko esitetään yleensä yhdellä värillä, usein mustalla tai valkealla. Joukon ulkopuoliset alueet esitetään useilla eri väreillä. Tietyn pisteen (a, b) väri kuvaa sitä, miten nopeasti edellä kuvattu pistejono karkaa ääretömyyteen, kun koordinaatteja a, b käytetään laskennassa. Väriskaala sinänsä on mielivaltainen ja valitaan pikemminkin esteettisten mieltymysten mukaan.

Yllä joukko on valkea, sen ulkopuoli musta.