

Funktion jatkuvuus

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivaatta

1/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

Jatkuvuuden määritelmä

Reaalifunktio f on *jatkuva* pisteessä a , jos funktion raja-arvo tässä pisteessä on olemassa ja se on yhtä suuri kuin funktion arvo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

■ funktio
(reaali-)

■ raja-arvo
(funktion)

Funktion epäjatkuvuus voi ilmetä kahdella tavalla: Joko raja-arvoa ei ole olemassa tai se kyllä on olemassa, mutta ei ole sama kuin funktion arvo.

Funktio on *jatkuva jollakin reaaliakselin välillä*, jos se on jatkuva tämän välin jokaisessa pisteessä. Havainnollisesti tämän voidaan sanoa tarkoittavan, että funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä tällä välillä. On kuitenkin tapauksia, joissa puhe yhtenäisestä käyrästä antaa liian yksinkertaisen mielikuvan.

■ väli
(reaaliakselin)

■ kuvaaja

■ käyrä (taso-)

Alkeisfunktiot ovat yleensä jatkuvia määrittelyalueensa jokaisessa pisteessä. Usein sanotaan, että funktio $f(x) = 1/x$ on epäjatkuva origossa. Tarkkaan ottaen kuitenkin funktio ei ole määritelty origossa ja kaikkialla muualla se on sekä määritelty että jatkuva. Sanonta kuitenkin puolustaa paikkaansa siinä mielessä, että jos funktion määrittelyalue laajennetaan antamalla sille origossa jokin arvo, siitä tulee väistämättä origossa epäjatkuva.

■ alkeisfunktio

■ määrittely-
joukko

Funktion jatkuvuus

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivaatta

2/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

Esimerkkejä funktioiden epäjatkuvuuksista: hyppyepäjatkuvuus

1) Funktiolla on *hyppyepäjatkuvuus* pisteessä a , jos sekä oikeanpuolinen että vasemmanpuolinen raja-arvo tässä pisteessä on olemassa, mutta ne ovat eri suuret. (Tällöin siis varsinaista raja-arvoa ei ole.) Epäjatkuvuuden kannalta on epäolennaista, mikä funktion arvo $f(a)$ on; se voi yhtyä jompaankumpaan toispuolisista raja-arvoista tai olla jotakin muuta.

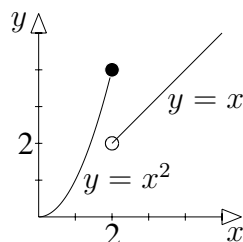
■ raja-arvo
(funktion)

■ raja-arvo
(toispuolinen)

Esimerkiksi funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \leq 2, \\ x, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

on hyppyepäjatkuvuus pisteessä $x = 2$.

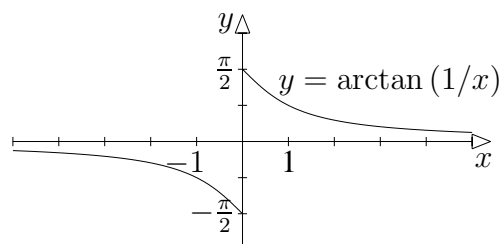


2) Määrittelemällä

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 2, \\ 2x, & \text{kun } x > 2, \\ 0, & \text{kun } x = 2 \end{cases}$$

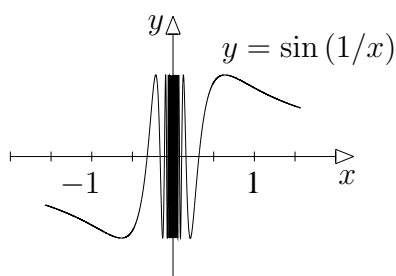
saadaan funktio, jolla on raja-arvo 4 pisteessä $x = 2$, mutta tämä poikkeaa funktion arvosta $f(2) = 0$. Funktio on siis tässä pisteessä epäjatkuva.

3) Esimerkki yhdellä lausekkeella määritellystä funktiosta, jolla on hyppyepäjatkuvuus, on $f(x) = \arctan(1/x)$. Tarkkaan ottaen tämä ei ole määritelty origossa, mutta on luontevaa määritellä sen arvoksi jompikumpi toispuolisista raja-arvoista $-\pi/2$ tai $\pi/2$, jolloin origoon syntyy hyppyepäjatkuvuus.



Lisäesimerkkejä funktioiden epäjatkuvuuksista

4) Funktio $f(x) = \sin(1/x)$, kun $x \neq 0$, $f(0) = 0$, on jatkuva muualla paitsi origossa. Origossa on epäjatkuvuuspiste, koska edes toispuolisia raja-arvoja ei origossa ole olemassa, vaan funktio heilahtelee sitä rajummin arvojen -1 ja 1 välillä, mitä lähempänä origoa ollaan.



5) Esimerkkinä funktiosta, joka on jatkuva vain yhdessä pisteessä ($x = 1$) ja kaikkialla muualla epäjatkuva, olkoon seuraava:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \text{ on rationaalinen,} \\ 2 - x, & \text{kun } x \text{ on irrationaalinen.} \end{cases}$$

