

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ polynomiyhtälöt, ■ juuriyhtälöt, ■ itseisarvoyhtälöt, ■ transkendenttiyhtälöt, ■ trigonometrian kaavat, ■ logaritmifunktio, ■ Newtonin iteraatio, ■ yhtälöryhmät

Yhtälö

Yhtälöksi kutsutaan kahden lausekkeen merkittyä yhtäsuuruutta, joka sisältää vähintään yhden symbolin (tuntemattoman). Tämän arvo pyritään määrittämään siten, että yhtälö toteutuu, so. lausekkeet ovat yhtä suuret. Yhtälöllä voi olla yksi tai useampia *ratkaisuja* — *juuria* — tai mahdollisesti ei lainkaan. Ratkaisujen lukumäärään vaikuttaa myös se, mistä lukujoukosta niitä etsitään. Tavallisinta on etsiä reaalisia ratkaisuja, mutta niitä voidaan etsiä myös kompleksilukujoukosta, luonnollisten lukujen joukosta tai jostakin näiden osajoukosta.

Esimerkkejä yhtälöistä ovat seuraavat:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 7x^2 + 8 = 0, & \text{b) } \sin x = e^{-x}, \\ \text{c) } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0, & \text{d) } x^2 + y^2 = z^2. \end{array}$$

Kohtien a ja b yhtälöillä on yksi tuntematon, x . Edellisellä yhtälöllä ei ole reaalisia juuria, kompleksisia on kaksi; jälkimmäisellä on äärettömän monta reaalista ratkaisua.

Kohdan c yhtälöllä on reaalialueella täsmälleen yksi ratkaisu kahdesta tuntemattomasta x , y huolimatta: $x = -1$, $y = 2$. Yhtälö voidaan nimittäin saattaa muotoon $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$. Kompleksialueella ratkaisuja on äärettömän paljon: toinen tuntematon voidaan valita vapaasti ja sen jälkeen ratkaista toinen.

Kohdan d yhtälössä on kolme tuntematonta: x , y , z . Kompleksisia ratkaisuja on ilmeisestikin äärettömän paljon; itse asiassa mitkä tahansa kaksi tuntematonta voidaan valita vapaasti ja tämän jälkeen ratkaista kolmas. Reaalisia ratkaisuja on myös äärettömän paljon, mutta tällöin ei mitä tahansa kahta tuntematonta välttämättä voida valita aivan vapaasti. Mielenkiintoinen on tilanne, missä haetaan vain kokonaislukuratkaisuja; näitäkin on äärettömän paljon, ns. Pythagoraan luvut.

■ Pythagoras

■ Pythagoraan lause

Yhtälöt

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ polynomiyhtälöt, ■ juuriyhtälöt, ■ itseisarvoyhtälöt, ■ transkendenttiyhtälöt, ■ trigonometrian kaavat, ■ logaritmifunktio, ■ Newtonin iteraatio, ■ yhtälöryhmät

2/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

Yhtälöiden sieventäminen

Yhtälöiden sieventäminen tapahtuu siirtämällä termejä puolelta toiselle (jolloin termin merkki muuttuu) ja kertomalla tai jakamalla yhtälön molemmat puolet samalla luvulla tai lausekkeella. Jos lauseke on $= 0$ joillakin tuntemattoman arvoilla, näiden merkitys yhtälön ratkaisun kannalta on tutkittava erikseen.

Yhtälön molempiin puoliin voidaan kohdistaa myös sama funktio ja saadaan uusi yhtälö, jolla on ratkaisuina ainakin samat tuntemattoman arvot kuin alkuperäisellä yhtälöllä. Jos siis x_0 toteuttaa yhtälön $f(x) = g(x)$, se toteuttaa myös yhtälön $h(f(x)) = h(g(x))$. Juuria voi kuitenkin tulla lisää. Esimerkiksi yhtälön $\sqrt{x} = x - 2$ ainoa juuri on $x = 4$, mutta jos yhtälön kumpikin puoli korotetaan neliöön (so. niihin kohdistetaan funktio $h(u) = u^2$), saadaan $x = x^2 - 4x + 4$, jolla on kaksijuurtta, $x = 4$ ja $x = 1$. Samoin: Yhtälön $x = -x$ ainoa ratkaisu on $x = 0$, mutta yhtälön $\cos x = \cos(-x)$ ratkaisuksi kelpaa mikä luku tahansa!

Jos funktio h on aidosti kasvava (tai aidosti vähenevä), ovat yhtälöt $f(x) = g(x)$ ja $h(f(x)) = h(g(x))$ yhtäpitäviä, ts. niillä on samat juuret. Tämä seuraa siitä, että tällöin on myös olemassa käänteisfunktio h^{-1} ja toiseen suuntaan siirtyminen on itse asiassa tämän kohdistamista jälkimmäisen yhtälön kumpaankin puoleen. Siten esimerkiksi yhtälöillä $\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ ja $x^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$ on samat juuret.

■ kosini

■ kasvava
(funktio)

■ kasvava
(funktio)

■ vähenevä
(funktio)

■ vähenevä
(funktio)

■
käänteisfunktio

■
käänteisfunktio

■
logaritmifunktio

Yhtälöt

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ polynomiyhtälöt, ■ juuriyhtälöt, ■ itseisarvoyhtälöt, ■ transkendenttiyhtälöt, ■ trigonometrian kaavat, ■ logaritmifunktio, ■ Newtonin iteraatio, ■ yhtälöryhmät

3/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

Eri tyyppisiä yhtälöitä

Jos yhtälö voidaan saattaa muotoon $p(x) = 0$, missä $p(x)$ on polynomi, puhutaan *polynomiyhtälöstä*.

Jos yhtälössä lisäksi esiintyy juurilausekkeita, kyseessä on *juuriyhtälö*.

Jos yhtälössä esiintyy muitakin funktioita, esimerkiksi trigonometrisia funktioita, eksponentti- tai logaritmifunktioita, kyseessä on *transkendenttiyhtälö*.

Itseisarvoyhtälöistä puhutaan, jos yhtälössä esiintyy itseisarvoja.

Yleispätevää menettelyä minkä tahansa yhtälön ratkaisemiseen ei ole. Muotoon $f(x) = 0$ kirjoitettua reaalista yhtälöä voidaan aina tutkia tarkastelemalla funktion $f(x)$ käyttäytymistä: piirtämällä sen kuvaaja, tutkimalla funktion merkin muuttumista, jne. Tarkkoja ratkaisuja ei tällä tavoin yleensä saada, mutta usein on mahdollista saada käsitys esimerkiksi niiden lukumäärästä.

Edellytyksenä graafisille tarkasteluille yleensä on, että funktio f on reaaliarvoinen ja etsitään reaalista juurta x . Kompleksisten juurten havainnollistaminen edellyttäisi useimmiten useampiulotteista kuvittelukykyä, samoin graafisten esitysten tekeminen usean tuntemattoman yhtälöistä. Kolmiulotteinen havainnollistaminen on vielä helppoa, mutta ulotteisuuden kasvaessa joudutaan vaikeuksiin.

Menetelmät yhtälöiden ratkaisemiseksi voidaan jakaa *algebrallisiin*, joilla pyritään tarkkaan ratkaisuun, *numeerisiin*, joissa tavoitteena on konstruoida ratkaisua kohden suppeneva lukujono, ja *graafisiin*, joissa joudutaan tyytymään melko karkeisiin likiarvoihin.

Ajatukseltaan yksinkertaisin numeerinen menettely on Newtonin iteraatio.

■ polynomi

■ yhtälö
(polynomi-)

■ juuri
(murtopotenssi)

■ yhtälö (juuri-)

■
trigonometrinen
funktio (yleinen
määritelmä)

■ eksponentti-
funktio

■
logaritmifunktio

■ yhtälö
(transkendentti-
)

■ yhtälö
(itseisarvo-)

■ itseisarvo
(reaaliluvun)

■ itseisarvo
(kompleksiluvun)

■ kuvaaja

■
suppeneminen
(lukujonon)

■ lukujono

■ Newtonin
iteraatio