

Yhtälöryhmä

Yhtälöryhmässä on useita yhtälöitä ja yleensä myös useita tuntemattomia. Ta-
voitteena on löytää tuntemattomille sellaiset arvot, että kaikki yhtälöt toteutuvat
samanaikaisesti. Useimmiten tuntemattomia on yhtä paljon kuin yhtälöitä. Vält-
tämätöntä tämä ei kuitenkaan ole.

Ryhmälle voidaan etsiä ratkaisuja erilaisista lukujoukoista: reaalisia ratkaisuja,
kaikkia kompleksisia ratkaisuja tai ratkaisuja jostakin rajoitetummasta lukujou-
kosta. Vrt. yhtälöön.

Esimerkkejä yhtälöryhmistä ovat seuraavat, missä tuntemattomia on merkitty x ,
 y , z :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 17 \\ 5x + 2y = 37 \end{array} \right. & ; \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ -x + y = 1 \\ 3x - y + 2z = -3 \end{array} \right. ; \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ e^x + \sin y = 1 \end{array} \right. & ; \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right. . \end{array}$$

Kohdan a yhtälöryhmällä on yksi ainoa ratkaisu, $x = 7$, $y = 1$.

Kohdassa b ratkaisuja on äärettömän monta, mutta mikä tahansa lukukolmikko ei
kuitenkaan ole ratkaisu; kysymykseen tulevat muotoa $x = -1 - t$, $y = -t$, $z = t$
olevat luvut, missä t voidaan valita vapaasti. Jos etsitään reaalisia ratkaisuja, on
luonnollisesti t valittava reaaliseksi; kompleksisten ratkaisujen tapauksessa t voi
olla mikä tahansa kompleksiluku.

Kohdassa c reaalisia ratkaisuja on kaksi; näiden likiarvot ovat $x = -0.808901$,
 $y = 0.587945$ ja $x = 0.553738$, $y = -0.832691$.

Kohdassa d on vain yksi reaalin ratkaisu huolimatta siitä, että yhtälöitä (ehtoja)
on vähemmän kuin tuntemattomia: $x = y = z = 1$.

Kaksi ensimmäistä esimerkkiä ovat *lineaarisia yhtälöryhmiä*. Tämä ilmenee si-
ten, että yhtälöt ovat ensimmäisen asteen tuntemattomien suhteen, ts. tuntemat-
tomat esiintyvät vain ensimmäisessä potenssissa eivätkä kerrottuina keskenään.
Kolmas ja neljäs esimerkki ovat *epälineaarisia yhtälöryhmiä*.

■ yhtälö

■
kompleksiluku

■ asteluku

■ polynomi

■ potenssi
(kokonaisluku-)

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yksinkertaisin tapa yrittää ratkaista yhtälöryhmä on ratkaista ensin jokin yhtälöistä yhden tuntemattoman suhteen, jolloin tämä tulee lausutuksi muiden tuntemattomien avulla, ja sijoittaa tulos muihin yhtälöihin. Tällöin yksi tuntemattomista tulee eliminoiduksi ja samalla yhtälöiden määrä vähenee yhdellä. Tämän jälkeen eliminoidaan samalla tavoin toinen tuntematon. Menettelyä jatketaan, kunnes jäljellä on vain yksi yhtälö.

Jos viimeisessä yhtälössä on jäljellä vain yksi tuntematon, on päädytty yhden yhtälön tapaukseen; ks. yhtälöt. Jos jäljellä on useampia tuntemattomia, on yhtälöä tutkittava lähemmin jollakin sopivalla tavalla; usein — mutta ei aina — ratkaisuja on tällöin äärettömän paljon.

Edempänä olevat esimerkit havainnollistavat menettelyä.

Esitetty menettely ei toimi, jos jossakin vaiheessa ei jäljellä olevassa ryhmässä ole ainoatakaan sellaista yhtälöä, että jokin tuntematon saataisiin ratkaistuksi muiden avulla. Näin voi aivan hyvin käydä esimerkiksi riittävän korkea-asteisten polynomi yhtälöiden tai transkendentti yhtälöiden tapauksessa. Mitään yleispätevää menettelyä yhtälöryhmän ratkaisemiseen ei olekaan olemassa.

Toisaalta edellä kuvattu eliminointimenettely voidaan usein järjestää laskennan kannalta tehokkaampaankin muotoon. Tällainen järjestely on esimerkiksi lineaarisiin yhtälöryhmiin soveltuva *Gaussin algoritmi*, jota ei tässä lähemmin käsitellä.

Vaikka tuntemattomien eliminointi ei onnistuisikaan, voidaan yhtälöryhmä silti pyrkiä ratkaisemaan numeerisesti, jolloin täytyy tuntea lähtöapproksimaatio kaikille tuntemattomille ja kerralla saadaan vain yksi ratkaisu (so. yhden arvot tuntemattomille) samaan tapaan kuin yhden yhtälön Newtonin iteraatiassa. Menettelyä kutsutaan tällöinkin Newtonin iteraatioksi.

■ yhtälö

■ yhtälö
(polynomi-)■ yhtälö
(transkendentti-)

■ Gauss

■ Newtonin
iteraatio

Esimerkki 1 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ 5x + 2y = 37 \end{cases}$$

on lineaarinen. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = \frac{1}{2}(17 - 3y)$ ja kun tämä sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön, se saa muodon

$$\frac{5}{2}(17 - 3y) + 2y = 37 \quad \text{eli} \quad 85 - 15y + 4y = 74.$$

Tästä seuraa $y = 1$, jolloin $x = \frac{1}{2}(17 - 3 \cdot 1) = 7$.

Yhtälö voidaan myös ratkaista kertomalla kumpikin yhtälö sopivalla vakiolla ja laskemalla sen jälkeen puolittain yhteen tavoitteena toisen tuntemattoman eliminointi. Jos halutaan eliminoida x , valitaan kertoimiksi 5 ja -2 , jolloin ryhmä saa muodon

$$\begin{cases} 10x + 15y = 85 \\ -10x - 4y = -74. \end{cases}$$

Puolittainen yhteenlasku antaa $11y = 11$, mistä päädytään samaan ratkaisuun kuin edellä. Itse asiassa eliminointi tapahtuu täsmälleen samoin kuin edellä; laskut on vain järjestetty hieman eri tavoin.

Esimerkki 2 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -x + y = 1 \\ 3x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

eliminoimalla ensin x . Jos ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan x , saadaan $x = -y - 2z - 1$, ja tämän sijoittaminen kahteen muuhun yhtälöön antaa

$$\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \end{cases},$$

ts. on saatu kahteen kertaan sama yhtälö: $y + z = 0$. Tämä onkin ainoa tuntemattomille y ja z saatava ehto. On siis oltava $y = -z$, mutta z :n arvo voidaan valita vapaasti. Merkitään tätä t :llä, jolloin siis $z = t$, $y = -t$ ja $x = -y - 2z - 1 = -t - 1$. Yhtälöryhmällä on siis äärettömän monia ratkaisuja.

Esimerkki 3 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ e^x + \sin y = 1 \end{cases}$$

voidaan jälkimmäisestä yhtälöstä ratkaista $x = \ln(1 - \sin y)$ ja sijoittaa tämä edelliseen, jolloin saadaan yhtälö

$$[\ln(1 - \sin y)]^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Yhtälö on tämän jälkeen ratkaistavissa Newtonin iteraatiolla. Alkuarvot saadaan helpoimmin graafisesti.

■ Newtonin iteraatio

Mikäli aluksi ratkaistaan y jälkimmäisestä yhtälöstä tai kumpi tahansa tuntematon edellisestä, joudutaan funktioihin, joilla on useita haaroja: $y = \arcsin(1 - e^x)$, $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ tai $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. (Ks. juuri, arcus-funktiot.) Sijoitettaessa jäljellä olevaan yhtälöön on jokainen haara otettava erikseen huomioon, jolloin tehtävä jakautuu osiin. Aluksi esitetty tapa lieenee siten yksinkertaisin.

■ funktio
■ juuri (murtopotenssi)
■ juurifunktio
■ arcus-funktio

Yhtälöryhmä voidaan myös ratkaista kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla, jota ei kuitenkaan lähemmin käsitellä.

Esimerkki 4 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

ratkeaa helpoimmin sijoittamalla jälkimmäisestä yhtälöstä $z = x + y - 1$ edelliseen:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \text{eli} \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0,$$

minkä ainoa reaalinen ratkaisu on $x = y = 1$, jolloin myös $z = 1$. Kompleksisia ratkaisuja etsittäessä voidaan esimerkiksi y valita vapaasti, minkä jälkeen x voi saada kaksi eri arvoa, vastaavasti z .