

Epäyhtälöt

ESITIEDOT: ■ yhtälöt

KATSO MYÖS:

1/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

Epäyhtälö

Epäyhtälöllä tarkoitetaan ehtoa, missä kahdesta lausekkeesta toinen on suurempi tai mahdollisesti yhtä suuri kuin toinen: $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$. Merkit voidaan luonnollisesti kirjoittaa myös toisinpäin: $g(x) > f(x)$, $g(x) \geq f(x)$. Tuntemattomia on vähintään yksi (kuten edellä), mutta voi olla useampiakin. Nämä on luonnollisimmin ajateltava reaalisiksi, koska kompleksilukuja ei voida järjestää suuruusjärjestykseen.

■
kompleksiluku

Esimerkkejä:

$$2x - 3 > 0; \quad x^3 - 2x^2 \leq x - 2; \quad x^2 + y^2 \geq 2.$$

Epäyhtälöiden ratkaiseminen

Epäyhtälöiden ratkaisumenettelyt ovat kahta tyyppiä:

1) Epäyhtälöä käsitellään kuten vastaavaa yhtälöä: Siirretään termejä puolelta toiselle, kerrotaan tai jaetaan puolittain vakiolla tai lausekkeella. Erona yhtälöön nähden on tällöin, että kertominen tai jakaminen negatiivisella luvulla tai lausekkeella kääntää erisuuruusmerkin suunnan. Esimerkiksi

$$-2x < 10 \implies x > -5.$$

Erityisesti tämä on huomattava lausekkeella kerrottaessa: Jos lausekkeen merkkiä ei tunneta — esimerkiksi se sisältää tuntemattoman — sillä ei yleensä kannata kertoa. Jos tämä kuitenkin tuntuu tarpeelliselta, joudutaan lasku jakamaan kahtia: positiiviseen ja negatiiviseen tapaukseen. Esimerkkejä edempänä.

2) Toisena menettelynä on saattaa epäyhtälö ensin muotoon $f(x) \geq 0$ ja tutkia sitten funktion $f(x)$ käyttäytymistä, erityisesti merkinvaihtoja. Tällöin joudutaan aluksi etsimään funktion nollakohdat, ts. ratkaisemaan vastaava yhtälö $f(x) = 0$. Lisäksi merkinvaihto on mahdollinen funktion f epäjatkuvuuskohdissa.

Merkinvaihtoja tutkittaessa on funktion f lauseke pyrittävä sopivasti paloittelemaan. Jos esimerkiksi funktio on muotoa

$$f(x) = \frac{g_1(x)g_2(x)}{h(x)},$$

on yleensä helpointa tutkia erikseen funktioiden g_1 , g_2 ja h merkkejä eikä niinkään koko funktiota f . Graafisten esitysten piirtäminen auttaa hahmottamaan tilannetta.

■ yhtälö

■
sieventäminen
(yhtälön)

■ funktio

■ jatkuvuus

■ kuvaaja

Esimerkki 1 epäyhtälöistä

Olkoon ratkaistavana epäyhtälö

$$\frac{x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2} > 1.$$

Koska nimittäjä $x^2 + 2$ on kaikilla arvoilla x positiivinen, epäyhtälö voidaan kertoa sillä puolittain, jolloin saadaan $x^2 + 3x - 7 > x^2 + 2$ eli $3x > 9$. Jakamalla positiiviluvulla 3 saadaan $x > 3$.

Samaan tulokseen päästään siirtämällä kaikki termit ensin yhtäläisyysmerkin vasemmalle puolelle ja sieventämällä, jolloin epäyhtälö saa muodon

$$\frac{3x - 9}{x^2 + 2} > 0.$$

Koska nimittäjä on aina positiivinen, riippuu lausekkeen merkki vain osoittajasta. Tämä on positiivinen, jos $x > 3$.

Esimerkki 2 epäyhtälöistä

Epäyhtälö

$$x^3 - 2x^2 \leq x - 2$$

voidaan kirjoittaa $x^3 - 2x^2 - x + 2 \leq 0$, jolloin joudutaan tutkimaan polynomifunktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ käyttäytymistä. Tämän nollakohdat ovat $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = 2$. Koska polynomifunktio on kaikkialla jatkuva, ei muita merkinvaihtokohtia voi olla.

■
polynomifunktio
■ jatkuvuus

Piirtämällä kuvaaja, sijoittamalla funktioon nollakohtien välissä olevia arvoja tai polynomifunktioiden yleisten ominaisuuksien perusteella voidaan päätellä, että funktio saa negatiivisia arvoja, kun $x < -1$ ja $1 < x < 2$. Epäyhtälön ratkaisu on siten $x \leq -1$ tai $1 \leq x \leq 2$.

■ kuvaaja

Toisena ratkaisuvaihtoehtona on jakaa alkuperäinen epäyhtälö aluksi tekijällä $x - 2$. Jos jakaja on positiivinen, ts. $x > 2$, päädytään epäyhtälöön $x^2 \leq 1$; jos $x < 2$, epäyhtälö on $x^2 \geq 1$.

Edellisessä tapauksessa olisi $-1 \leq x \leq 1$, mutta tämä ei täytä ehtoa $x > 2$, eikä ratkaisuja siis ole.

Jälkimmäisessä tapauksessa tulee olla $x \leq -1$ tai $x \geq 1$. Kun tämä yhdistetään rajoitukseen $x < 2$, saadaan $x \leq -1$ tai $1 \leq x < 2$. Lisäksi epäyhtälö toteutuu yhtälönä, jos $x = 2$.

Epäyhtälöt

ESITIEDOT: ■ yhtälöt

KATSO MYÖS:

5/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

Esimerkki 3 epäyhtälöistä

Murtoepäyhtälö

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{9 - x^2} \geq 0$$

voidaan ratkaista tutkimalla erikseen osoittajan ja nimittäjän merkkejä.

Osoittajan nollakohdat ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = 5$. Kyseessä on toisen asteen polynomi, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Nollakohtien välissä arvot ovat siis negatiivisia, ulkopuolella positiivisia.

Nimittäjän nollakohdat ovat vastaavasti $x_3 = -3$ ja $x_4 = 3$. Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jolloin arvot nollakohtien välissä ovat positiivisia, ulkopuolella negatiivisia.

Osoittajan ja nimittäjän merkeistä saadaan seuraava kuvio:

osoittaja	+	+	+	+	+	+	-	-	-	+
nimittäjä	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-
murtolauseke	-	+	+	+	+	+	-	+	+	-
	-3						2	3		5

Epäyhtälön ratkaisu on tällöin $-3 < x \leq 2$ tai $3 < x \leq 5$. Yhtäsuuruus ei luonnollisestikaan saa olla mukana niissä pisteissä, jotka ovat nimittäjän nollakohtia.

Esimerkin epäyhtälö voidaan myös ratkaista kertomalla se puolittain nimittäjällä. Tällöin on otettava huomioon nimittäjän merkki. Koska nimittäjä on positiivinen alueessa $-3 < x < 3$, saadaan kertomisen jälkeen epäyhtälö $x^2 - 7x + 10 \geq 0$. Sen ratkaisuna on $-3 < x \leq 2$, kun otetaan huomioon rajoitus $-3 < x < 3$.

Alueessa $x < -3$ tai $x > 3$ kääntää nimittäjällä kertominen epäyhtälön erisuuruusmerkin ja saadaan $x^2 - 7x + 10 \leq 0$. Tämän ratkaisuna tarkasteltavana olevassa alueessa on $3 < x \leq 5$.

Kaikkiaan päädytään siis samaan tulokseen kuin edellä.

- polynomifunktio
- kuvaaja
- paraabeli (kartioleikkauksena)
- paraabeli (xy-koordinaateissa)

Epäyhtälöt

ESITIEDOT: ■ yhtälöt

KATSO MYÖS:

6/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

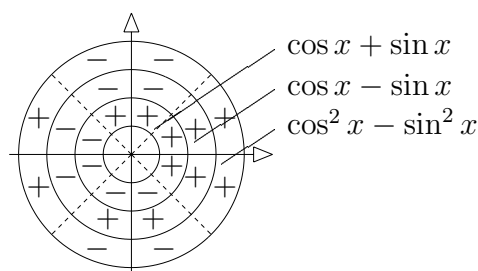
Esimerkki 4 epäyhtälöistä

Trigonometrinen epäyhtälö

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq 0$$

voidaan ratkaista kahdellakin tavalla.

Vasen puoli voidaan hajottaa kahden tekijän tuloksi, jolloin saadaan $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$. Tekijöiden merkkien tutkimiseksi on ensin ratkaistava trigonometriset yhtälöt $\cos x + \sin x = 0$ ja $\cos x - \sin x = 0$. Trigonometrian kaavojen perusteella nämä saadaan muotoon $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ ja $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, joista seuraa nollakohdiksi $x = \pm\pi/4 + n\pi$, missä n on kokonaisluku. Tutkimalla kummankin tekijän merkit alueella $[-\pi, \pi]$, saadaan seuraava kuvio:



■ tekijöihin jako (polynomin)

■ tekijöihin jako (polynomin)

■ tekijöihin jako (polynomin)

■ yhtälö (trigonometrinen)

■ trigonometria (peruskaavat)

■ väli (reaaliakselin)

Ottamalla lisäksi huomioon sini- ja kosinifunktioiden jaksollisuus (jaksona 2π) saadaan epäyhtälön ratkaisuksi $-\pi/4 + n\pi \leq x \leq \pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Toisena vaihtoehtona on kirjoittaa epäyhtälön vasen puoli kaksinkertaisen kulman kosinin kaavan avulla uuteen muotoon: $\cos 2x \geq 0$. Tällöin tulee olla $-\pi/2 + 2n\pi \leq 2x \leq \pi/2 + 2n\pi$, mistä kakkosella jakamalla päästään samaan ratkaisuun kuin edellä.

Kumpaa tahansa tapaa käytettäessä on funktioiden kuvaajien piirtämisestä suurta apua.

■ sini

■ kosini

■ jaksollinen (funktio)

■ kuvaaja

Epäyhtälöt

ESITIEDOT: ■ yhtälöt

KATSO MYÖS:

7/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

Esimerkki 5 epäyhtälöistä

Epäyhtälöä $x^2 + y^2 \geq 2$ eli $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \geq 0$ vastaava yhtälö on $x^2 + y^2 - 2 = 0$. Tämä esittää origokeskistä ympyrää, jonka säde on $\sqrt{2}$. Jatkuva kahden muuttujan $f(x, y)$ vaihtaa merkkinsä tätä ympyräviivaa ylitettäessä. On ilmeistä, että ympyrän sisäpuolella funktio saa negatiivisia arvoja, ulkopuolella positiivisia. Epäyhtälön ratkaisun muodostavat siis ne pisteet (x, y) , jotka sijaitsevat ympyräviivalla tai sen ulkopuolella.

■ ympyrä
(esimerkki)

■ ympyrä

■ ympyrä (ala)

■ jatkuvuus

■ funktio
(kahden
muuttujan)