
Laskulait

Summan ja tulon *vaihdannaisuudeksi* eli *kommutatiivisuudeksi* kutsutaan sääntöä, jonka mukaan tulos ei riipu termien tai tekijöiden järjestyksestä:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

Liitännäisyys eli *assosiatiivisuus* tarkoittaa mahdollisuutta asettaa sulut mihin kohtiin tahansa:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

Vaihdannaisuus ja liitännäisyys yhdessä merkitsevät, että summassa voidaan termit laskea yhteen missä järjestyksessä tahansa miten tahansa ryhmiteltyinä. Vastaava pätee tulon tekijöille.

Osittelulaeissa eli *distributiivisuudessa* on kysymys summan ja tulon suhteesta toisiinsa:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Kumpikin sääntö antaa itse asiassa saman laskulain, koska kertolasku on vaihdannainen. Molemmat on kuitenkin tapana esittää erikseen, koska samojen laskulakien voimassaoloa tarkastellaan matematiikassa myös tapauksissa, missä kertolasku ei ole vaihdannainen. Yksinkertainen esimerkki tällaisesta kertolaskusta on vektorialgebran ristitulo.

■ ristitulo

Summamerkintä

Useiden jollakin tavoin samantyyppisten lausekkeiden summalle voidaan käyttää lyhyttä *summamerkintää*:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k .$$

Tässä Σ on kreikkalainen kirjain iso sigma, jota käytetään *summamerkinä*. Symboli k (jonka sijalla voisi olla mikä tahansa muuta merkitsemätön symboli) on *summeerausindeksi*. Summamerkin ala- ja yläpuolella kerrotaan, mitä kokonaislukuarvoja indeksille annetaan; tyypillisesti ilmoitetaan ala- ja yläraja. Jokainen indeksiarvo sijoitetaan vuorollaan summan lausekkeeseen a_k ja tulokset lasketaan yhteen.

■ kreikkalaiset kirjaimet

Summan yhteenlaskettavia a_k kutsutaan *termeiksi*.

Esimerkkejä:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^6 2^k &= 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 124, \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pariton}}}^7 k^3 &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 496, \\ \sum_{k=1}^{100} 2 &= 2 + 2 + \dots + 2 = 200. \end{aligned}$$

Viimeisessä tapauksessa termejä on indeksirajojen osoittama määrä, 100 kappaletta, kaikki suuruudeltaan $= 2$.

Summa ja tulo

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS:

3/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Tulomerkintä

Samalla tavoin kuin summamerkintää käytetään myös *tulomerkintää*; tässä symbolina on kreikkalainen kirjain iso pii:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k .$$

Lausekkeet a_k ovat *tulontekijöitä* tai lyhyemmin *tekijöitä*. (Summassa on siis termejä, tulossa tekijöitä.)

Esimerkiksi:

$$\prod_{k=1}^n k = n!,$$
$$\prod_{k=1}^n 2 = 2^n,$$

■ kreikkalaiset
kirjaimet

■ kertoma
■ potenssi
(kokonaisluku-)

$$\prod_{k=1}^n 2^{a_k} = 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot \dots \cdot 2^{a_n} = 2^{a_1+a_2+\dots+a_n} = 2^{\sum_{k=1}^n a_k} .$$

Summamerkinnällä laskeminen

Laskulait johtavat seuraaviin sääntöihin laskettaessa summamerkintää käyttäen.

Summan kertominen luvulla (tai toisin päin ajateltaessa yhteisen tekijän ottaminen summasta) antaa

$$b \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n ba_k.$$

Usein käytetään myös kaksinkertaista (tai useampikertaista) summamerkintää, johon on itse asiassa ajateltava lisättäväksi sulut:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{jk} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{jk} \right).$$

Tällaisessa summassa voidaan *vaihtaa summeerausjärjestystä*:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{jk} \right) \\ &= (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1p}) + (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2p}) + \dots + \\ & \quad (a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{np}) \\ &= (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) + \dots + \\ & \quad (a_{1p} + a_{2p} + \dots + a_{np}) \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \right). \end{aligned}$$

Kahden summan tulo on

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) \left(\sum_{k=1}^p b_k \right) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \sum_{k=1}^p b_k \\ &= a_1 \sum_{k=1}^p b_k + a_2 \sum_{k=1}^p b_k + \dots + a_n \sum_{k=1}^p b_k \\ &= \sum_{k=1}^p a_1 b_k + \sum_{k=1}^p a_2 b_k + \dots + \sum_{k=1}^p a_n b_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_j b_k. \end{aligned}$$