

Funktiokäsitteen määrittely

Funktio f joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka jokaiseen joukon A alkioon liittää jonkin alkion joukosta B . Yleensä merkitään $f : A \rightarrow B$.

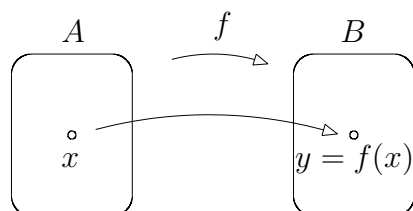
■ joukko

■ alkio

Jos x on joukon A alkio (merkitään $x \in A$) ja y tähän liittyvä joukon B alkio ($y \in B$), merkitään $y = f(x)$ ja sanotaan, että funktio f *kuva* alkion x alkiole y tai että y on alkion x *kuva* funktiossa f .

Joukko A on funktion f *lähtöjoukko* eli *määrittelyjoukko* ja B sen *maalijoukko*.

Joskus käytetään sanaa *kuvaus* synonyymina funktiolle. (Toisinaan sillä voi kyllä olla myös hieman funktion käsitteestä poikkeava merkitys.)



Funktion lähtö- tai maalijoukon ei tarvitse olla lukujoukko. Varsin luonnollinen joukkotyyppi on vaikkapa vektorijoukko. Varsinkin lukujoukkojen tapauksessa funktio annetaan usein ilmoittamalla sen lauseke, mutta muitakin mahdollisuuksia on.

■ vektori

Esimerkkejä funktioista

1) Olkoon A kaikkien Suomen kansalaisten joukko ja B sellaisten 11 merkin jonojen joukko, jotka ovat muodollisesti oikeita henkilötunnuksia. Sääntö, joka jokaiseen Suomen kansalaiseen liittää hänen henkilötunnuksensa, on funktio.

■ joukko

2) Olkoon $A = B = \mathbb{R}$ (reaalilukujoukko). Funktio $f : A \rightarrow B$ voidaan määritellä asettamalla $f(x) = x^2$, jolloin jokaiseen reaalilukuun x liitetään sen neliö.

■ reaaliluku

3) Olkoon A reaalilukujoukko kuten edellä, mutta B ei-negatiivisten reaalilukujen joukko (merkitään usein $B = \mathbb{R}_+$). Funktio $f : A \rightarrow B$ määritellään samoin kuin edellä: $f(x) = x^2$. Vaikka sääntö onkin sama, pidetään tätä eri funktiona kuin edellisessä kohdassa, koska maalijoukko on valittu eri tavoin.

4) Olkoon $A = B = \mathbb{N}$ (luonnollisten lukujen joukko). Funktio $f : A \rightarrow B$ voidaan määritellä myös seuraavasti:

■ luonnollinen luku

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(2) &= 1, \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \quad \text{kun } n \geq 3. \end{aligned}$$

Määrittelyä kutsutaan rekursiiviseksi, koska esimerkiksi $f(5)$ on määritelty arvojen $f(4)$ ja $f(3)$ avulla ja nämä on edelleen palautettava arvoihin $f(2)$ ja $f(1)$. (Funktion f arvoja kutsutaan *Fibonacci'n luvuiksi*.)

■ rekursiivisesti määritelty lukujono

5) Olkoon lähtöjoukkona xy -taso, ts. reaalilukuparien joukko. Tällöin merkitään $A = \mathbb{R}^2$. Maalijoukko olkoon $B = \mathbb{R}$. Määritellään funktio $f : A \rightarrow B$, joka jokaiseen xy -tason pisteeseen liittää erään lukuarvon: $f(x, y) = x^2 - y^2$. Tämä on esimerkki *kahden muuttujan funktiosta*.

■ koordinaatisto (xy-)

6) Vastaavaan tapaan voidaan määritellä *usean muuttujan funktio* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla vaikkapa $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Tässä on $n > 1$.

7) Olkoon $A = \mathbb{R}$ ja olkoon B kolmiulotteisten vektoreiden joukko. Yhtälö

■ vektori

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

määrittelee tällöin *vektoriarvoisen funktion* $\mathbf{r} : A \rightarrow B$. Funktion voidaan katsoa esittävän ruuviviivaksi kutsuttua avaruuskäyrää.

■ ruuviviiva
■ käyrä (avaruus-)

Surjektio, injektio, bijektio

Funktion $f : A \rightarrow B$ maalijoukon B jokaisen alkion ei tarvitse olla lähtöjoukon jonkin alkion kuva. Ne maalijoukon alkio, jotka todella ovat kuvia, muodostavat *kuvajoukon*; tätä merkitään $f(A)$. Samalle kuvajoukon alkiole voi kuvautua useampiakin lähtöjoukon alkioita.

■ joukko

■ alkio

Jos kuvajoukko on sama kuin maalijoukko, ts. jokainen maalijoukon alkio on ainakin yhden alkion kuva, sanotaan, että funktio on *surjektio*.

Jos jokainen maalijoukon alkio on enintään yhden alkion kuva, funktiota sanotaan *injeksioksi*.

Jos jokainen maalijoukon alkio on täsmälleen yhden alkion kuva, ts. funktio on sekä surjektio että injektio, sanotaan, että se on *bijektio*. Bijektiossa siis jokaista lähtöjoukon alkioita vastaa yksi maalijoukon alkio ja kääntäen.

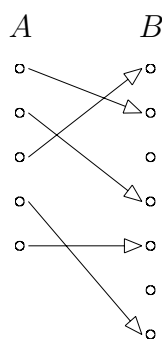
Esimerkiksi: Olkoon \mathbb{R} reaalilukujoukko ja \mathbb{R}_+ ei-negatiivisten reaalilukujen joukko. Jos $f(x) = x^2$, niin

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ei ole surjektio eikä injektio,

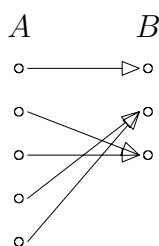
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ on surjektio, mutta ei injektio,

$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ei ole surjektio, mutta on injektio,

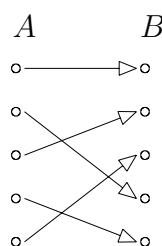
$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ on sekä surjektio että injektio, ts. bijektio.



injektio,
ei surjektio



surjektio,
ei injektio



bijektio

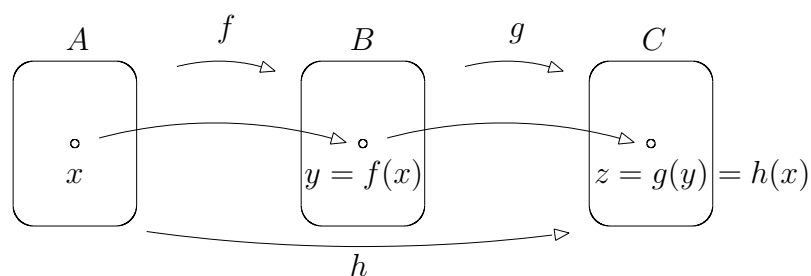
Yhdistetty funktio

Olkoon funktion f maalijoukko sama kuin funktion g lähtöjoukko: $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. Tällöin voidaan muodostaa näistä *yhdistetty funktio* $h : A \rightarrow C$ asettamalla $h(x) = g(f(x))$ kaikilla $x \in A$. Alkio $x \in A$ siis kuvataan ensin funktiolla f joukkoon B alkioille $f(x)$ ja tämä edelleen joukkoon C funktiolla g .

■ joukko

■ alkio

Yhdistettyä funktiota merkitään $h = g \circ f$.



Olkoon esimerkiksi yhdistettävänä funktiot f ja g , $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3$; kummankin lähtö- ja maalijoukko olkoon \mathbb{R} . Nämä voidaan yhdistää kahdella tavalla: $h = g \circ f$, $k = f \circ g$. Tällöin on

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^3 \quad \text{ja} \\ k(x) &= f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3 + 1. \end{aligned}$$

Tulokset eivät siis ole samat.

Käänteisfunktio

Jos funktio $f : A \rightarrow B$ on bijektio, kuvautuu jokaiselle joukon B alkioille täsmälleen yksi joukon A alkio. Tällöin voidaan määritellä funktio $g : B \rightarrow A$ asettamalla alkion $y \in B$ kuvaksi tälle kuvautuva joukon A alkio.

■ joukko

■ alkio

Funktiota g kutsutaan funktion f *käänteisfunktio*ksi. Merkitään $g = f^{-1}$, jolloin myös $g^{-1} = f$. Jos siis f ja g muodostavat funktio-käänteisfunktio -parin, on $y = f(x)$, jos ja vain jos $x = g(y)$.

Joukon A *identtiseksi funktioksi* kutsutaan funktiota $i : A \rightarrow A$, joka kuvaa jokaisen alkion itselleen: $i(x) = x$ kaikilla $x \in A$. Jos i_A on joukon A identtinen funktio ja i_B vastaavasti joukon B , pätee em. funktio-käänteisfunktio -parista yhdistetyille funktioille $g(f(x)) = x$ eli $g \circ f = i_A$ ja $f(g(y)) = y$ eli $f \circ g = i_B$.

Esimerkiksi funktion $f(x) = x^2$ käänteisfunktio on $g(x) = \sqrt{x}$, jolloin sekä lähtö- että maalijoukkona on ei-negatiiviset reaaliluvut \mathbb{R}_+ .

Funktion kuvaaja

Olkoot A ja B reaalilukujoukon osajoukkoja.

Funktion $f : A \rightarrow B$ *kuvaaja* muodostuu niistä xy -tason pisteistä, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = f(x)$, $x \in A$.

Koska jokaista $x \in A$ vastaa yksi funktion arvo, sijaitsee jokaisella y -akselin suuntaisella suoralla (joukon A kohdalla) täsmälleen yksi kuvaajan piste. Jos funktio f on jatkuva, muodostuu kuvaajasta yhtenäinen käyrä.

Samalla tavoin voidaan muodostaa kahden reaalimuuttujan funktion kuvaaja: ne xyz -avaruuden pisteet, jotka toteuttavat yhtälön $z = f(x, y)$. Jos funktio on jatkuva, kyseessä on kolmiulotteisen avaruuden pinta.

■ joukko

■ reaaliluku

■ osajoukko

■

koordinaatisto
(xy -)

■ koordinaatti

■ jatkuvuus

■ käyrä (taso-)

■

koordinaatisto
(xyz -)

■ pinta

■ pinta (toisen
asteen)