

Monikulmiot

ESITIEDOT: ■ kolmio

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat

1/5

■ Sisältö

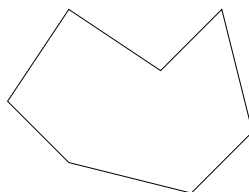
■ Hakemisto

Monikulmio

Monikulmioksi kutsutaan tasokuviota, jota rajaa perättäisten janojen muodostama monikulmion *piiri*. Janat ovat monikulmion *sivuja*, niiden päätepisteet monikulmion *kärkipisteitä*. Jos kärkipisteitä (ja siis myös sivuja) on n kappaletta, puhutaan n -kulmiosta. Perättäisten sivujen väliin jäävät monikulmion *kulmat*.

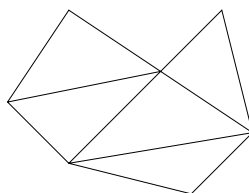
■ jana

■ kulma (taso-)



Jokainen n -kulmio voidaan kärkipisteet sopivasti yhdistämällä jakaa $n - 2$ kolmioksi, mistä seuraa, että n -kulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

■ kolmio



Janaa, joka yhdistää kaksi monikulmion kärkeä, mutta joka ei ole monikulmion sivu, kutsutaan sen *lävistäjäksi*. Jokaisesta n -kulmion kärjestä voidaan siten piirtää $n - 3$ lävistäjää. Kertomalla tämä kärkien lukumäärällä ja jakamalla kahdella (koska jokainen lävistäjä yhdistää kaksi kärkeä), saadaan lävistäjien kokonaismäärä: $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

Monikulmiot

ESITIEDOT: ■ kolmio

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat

2/5

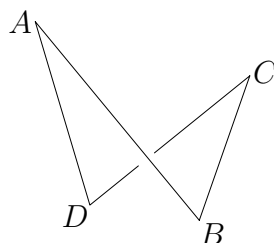
■ Sisältö

■ Hakemisto

Avaruusmonikulmio

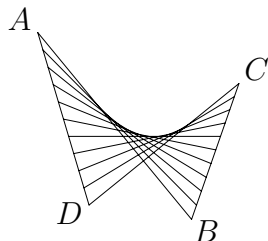
Monikulmioita voidaan muodostaa myös kolmiulotteiseen avaruuteen. Jos kärkiä on enemmän kuin kolme, nämä eivät yleensä ole tasokuvioita, koska kolme useammat pisteet eivät lainkaan välttämättä sijaitse samassa tasossa. Avaruusmonikulmion ajatellaankin muodostuvan vain peräkkäin asetetuista (sulkeutuvista) janoista ilman, että ne rajaavat mitään aluetta.

Esimerkiksi *avaruusnelikulmio* näyttää seuraavalta:



Tällä on seuraava ominaisuus: Jos jana XY liikkuu siten, että se alkuasemassaan yhtyy janaan AB , loppuasemassaan janaan DC ja piste X kulkee janan AD tasaisella nopeudella samassa ajassa kuin piste Y kulkee janan BC tasaisella nopeudella, niin liikkuva jana XY muodostaa *satulapinnan*.

■ satulapinta



Monikulmiot

ESITIEDOT: ■ kolmio

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat

3/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

Säännölliset monikulmiot

Monikulmiota sanotaan *säännölliseksi*, jos sen kaikki kulmat ovat yhtä suuria ja sivut yhtä pitkiä.

Säännöllisen kolmion eli tasasivuisen kolmion lisäksi voidaan harpilla ja viivoittimella helposti konstruoida säännölliset neli-, kuusi- ja kahdeksankulmiot, viisi- ja kymmenkulmiot ovat hieman vaikeampia.

■ kolmio

Eräillä nelikulmioilla, jotka eivät ole säännöllisiä eo. määritelmän mukaisesti, mutta joilla kuitenkin on joitakin säännöllisyysominaisuuksia, on omat nimityksensä:

- *Puolisuunnikas* on nelikulmio, jonka kaksi vastakkaista sivua on yhden-suuntaista. (Nämä ovat puolisuunnikkaan *kannat*.)
- *Suunnikas* on nelikulmio, jonka molemmat vastakkaiset sivuparit ovat keskenään yhdensuuntaiset.
- *Neljäkäs* eli *vinoneliö* on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Käytetään myös nimitystä *rombi*.
- *Suorakulmio* on suunnikas, jonka kaikki kulmat ovat yhtä suuria ($= 90^\circ$).

■ puolisuunnikas
(ala)

■ suunnikas
(ala)

■ suorakulmio
(ala)

Sarjan viimeisenä — säännöllisyyttä lisättäessä — on säännöllinen nelikulmio eli *neliö*.



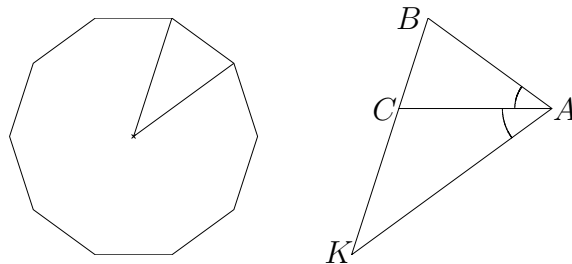
Säännöllisten monikulmioiden laskemisesta

Säännöllisten monikulmioiden sivujen pituuksia voidaan usein laskea algebrallisen geometrian keinoin. Toisaalta myös kompleksilukuaritmetiikkaa voidaan hyödyntää.

Jos säännöllinen n -kulmio sijoitetaan siten, että sen keskipiste on origossa ja kärjet R -säteisellä origokeskisellä ympyrällä, saadaan kärkien koordinaatit kompleksilukuina helposti muodossa Ru^k , missä $u = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ on kompleksinen kiertotekijä. Indeksien k eri arvot antavat eri kärjet; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Menettely on luonteeltaan numeerinen, koska sinin ja kosinin tarkkojen arvojen laskeminen ei yleensä ole helppoa.

Esimerkkinä algebrallisten menetelmien käytöstä olkoon säännöllisen kymmenkulmion sivun pituuden x määrittäminen, kun kulmio on piirretty R -säteisen ympyrän sisään.

Yhdistämällä ympyrän keskipiste kahteen peräkkäiseen kymmenkulmion kärkeen saadaan tasakylkinen kolmio, jonka kulmat ovat 36° , 72° ja 72° . Puolittamalla toinen kantakulma saadaan seuraava kuvio:



Kolmiot KAB ja ABC ovat yhdenmuotoiset, koska kummassakin on kulmat 36° ja 72° . Kolmiot ACK ja BAC ovat tasakylkisiä ja siis $|AB| = |AC| = |CK| = x$. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat verrannollisia, jolloin

$$\frac{|KA|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad \text{eli} \quad \frac{R}{x} = \frac{x}{R-x}.$$

Tästä seuraa

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)R.$$

(Vrt. kultaiseen leikkaukseen.)

■ kompleksiluku

■ sini

■ kosini

■ kiertotekijä

■ tasakylkinen

■ kulma (taso-)

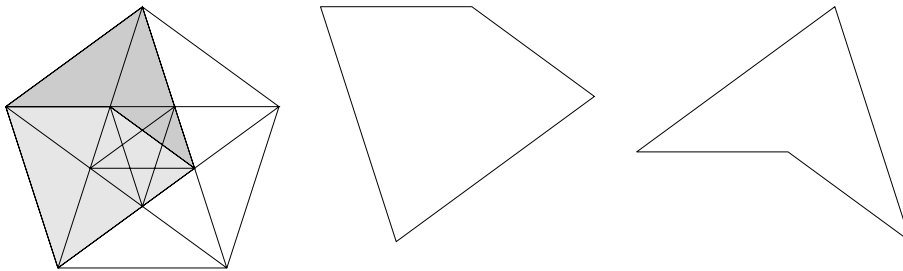
■ yhdenmuotoisuus
(kolmioiden)

■ kultainen
leikkaus

Laatoituksista

Eräillä monikulmiotyypeillä voidaan peittää taso aukkoja tai rakoja jättämättä, laatoittaa esimerkiksi kylpyhuoneen lattia. Tällaisia monikulmiotyypppejä ovat ainakin tasasivuiset kolmiot, vakiomuotoiset suorakulmiot, vakiomuotoiset suunnikkaat ja säännölliset kuusikulmiot. Kaikissa tapauksissa laatoitus on jaksollinen, ts. kuvio toistuu samanlaisena lattian joka paikassa.

Voidaan kysyä, olisiko mahdollista tehdä jollakin tavoin epäsäännöllisempi laatoitus esimerkiksi käyttämällä erilaisia laattoja, mutta kuitenkin vain muutamaa harvaa tyyppiä. Yksinkertaisin tällainen on englantilaisen fyysikon Roger Penrosen vuonna 1974 julkistama laatoitus, jossa käytetään kahta erilaista laatua. Näiden muodot voidaan löytää säännöllisestä viisikulmiosta:



Kumpikin laatta on nelikulmio, jossa kahden sivun pituus on a ja kahden muun sivun pituus $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a$. Toisen laatan kulmat ovat 72° , 72° , 72° ja 144° (leijatyyppe), toisen laatan 72° , 36° , 216° ja 36° (nuolenkärkityyppe).

Laatat voidaan liittää toisiinsa siten, että kahden eri tyyppin laatat aina muodostavat yhdessä suunnikkaan. Jos ne kuitenkin liitetään toisiinsa siten, että suunnikkaa ei synny, saadaan mielenkiintoisempi laatoitus: Sillä voidaan peittää miten suuri ala tahansa — koko taso — ja laatoitus on jaksoton, ts. ei löydy mitään sellaista laatoituksen osaa, joka säännöllisesti toistuisi samanlaisena.

Kokeile! Nuolenkärkityypin laattoja tarvitaan jonkin verran yli puolet leijatyypin laattojen määrästä. Parilla sadalla laattalla saa jo aikaan kiintoisia kuvioita.