

## Reaalifunktiot

1/5

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ juuret, ■ polynomit, ■ rationaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Reaalifunktion käsite; alkeisfunktiot

*Reaalifunktioilla* tarkoitetaan funktioita, joiden lähtöjoukkona on reaalilukujoukko  $\mathbb{R}$  tai jokin sen osaväli ja jotka ovat reaaliarvoisia, ts. myös maalijoukko on  $\mathbb{R}$ .

*Alkeisfunktioiksi* kutsutaan tavallisia koulukurssissa ja yliopistollisissa peruskursseissa käsiteltyjä reaalifunktioita. Ei ole täysin yksiselitteistä, mitä niihin eri yhteyksissä luetaan. Varsin luonnollisena voidaan pitää seuraavaa listaa:

itseisarvofunktio,  
potenssifunktiot,  
polynomit,  
rationaalifunktiot,  
eksponenttifunktiot,  
logaritmifunktiot,  
trigonometriset funktiot,  
näiden käänteisfunktiot (arcus-funktiot),  
hyperbelifunktiot,  
näiden käänteisfunktiot (area-funktiot),  
edellisistä yhdistettyinä funktioina saatavat funktiot.

Funktioita, joita yleensä ei pidetä alkeisfunktioina, ovat esimerkiksi funktiot, jotka määritellään jonkin *differentiaaliyhtälön* ratkaisuna tai *sarjakehitelmän* summana. Monia muitakin, jollakin tavoin epäsuoria tapoja voidaan käyttää funktioiden määrittelyyn.

■ funktio

■ lähtöjoukko

■ väli  
(reaaliakselin)

■ maalijoukko

■ itseisarvo  
(reaaliluvun)

■  
potenssifunktio

■  
polynomifunktio

■  
rationaalifunktio

■ eksponentti-  
funktio

■  
logaritmifunktio

■  
trigonometrinen  
funktio (yleinen  
määritelmä)

■ arcus-funktio

■  
hyperbelifunktio

■ area-funktio

■ yhdistetty  
funktio

■ differentiaa-  
liyhtälö

■ sarja

## Reaalifunktiot

2/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ juuret, ■ polynomit, ■ rationaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot

### Funktion kasvavuus ja väheneyys

Reaalimuuttujan reaaliarvoista funktiota kutsutaan *kasvavaksi*, jos kaikilla tarkastelujoukkoon kuuluvilla arvoilla  $x_1, x_2$  pätee

■ funktio

■ kasvava  
(funktio)

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

Jos funktionarvojen välillä ei sallita yhtäsuuruutta, funktio on *aidosti kasvava*:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Ehdot

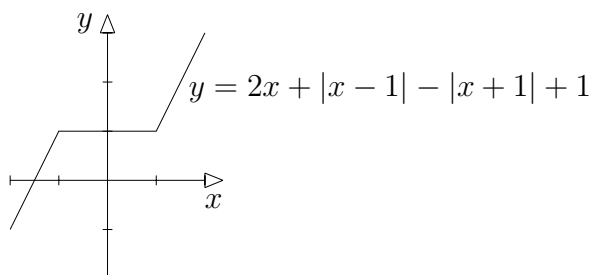
$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{ja} \\ x_1 < x_2 &\implies f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

merkitsevät vastaavasti, että funktio on *vähenevä* ja *aidosti vähenevä*.

■ vähenevä  
(funktio)

Terminologia ei ole aivan vakiintunutta. Eri yhteyksissä saatetaan (aidolle) kasvavuudelle ja (aidolle) väheneyydelle antaa hieman edellisestä poikkeaviakin määrittelyjä. Voidaan myös käyttää toisenlaisia nimityksiä, esimerkiksi ei-kasvava, ei-vähenevä. Syy on edellä olevien määritelmien hieman erikoisessa piirteessä: Jos funktion arvo on vakio, kyseessä on sekä kasvava että vähenevä funktio!

Esimerkkejä: Funktio  $f(x) = x^3$  on aidosti kasvava kaikkialla. Funktio  $f(x) = 2x + |x - 1| - |x + 1| + 1$  on kaikkialla kasvava, mutta ei aidosti kasvava, koska se saa välillä  $[-1, 1]$  vakioarvon 1.



## Reaalifunktiot

3/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ juuret, ■ polynomit, ■ rationaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot

### Funktion jaksollisuus; parillisuus ja parittomuus

Reaalifunktio  $f$  on *jaksollinen*, *jaksona*  $L \neq 0$ , jos kaikilla  $x$  on voimassa  $f(x + L) = f(x)$ .

Tunnettuja esimerkkejä jaksollisista funktioista ovat trigonometriset funktiot  $\sin x$  ja  $\cos x$ , joiden jakso on  $2\pi$ , sekä esimerkiksi  $\tan x$ , jonka jakso on  $\pi$ .

Jos funktion jakso on  $L$ , sillä on jaksona myös jokainen  $nL$ , missä  $n$  on kokonaisluku.

Reaalifunktio  $f$  *parillinen*, jos kaikilla  $x$  pätee  $f(-x) = f(x)$ , ja *pariton*, jos  $f(-x) = -f(x)$ .

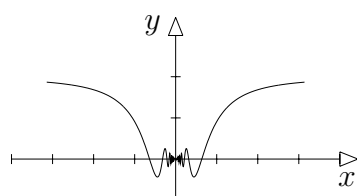
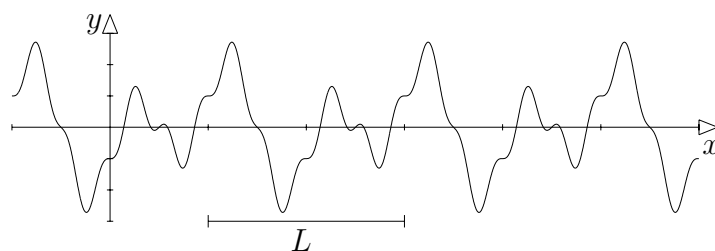
Parillisia funktioita ovat esimerkiksi  $\cos x$  ja  $|x|$ , parittomia  $\sin x$  ja  $x^3$ .

■ funktio

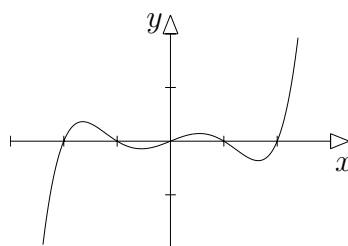
■

trigonometrinen  
funktio  
(symmetria)

■ pii



parillinen funktio



pariton funktio

## Reaalifunktiot

4/5

■ Sisältö  
■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ juuret, ■ polynomit, ■ rationaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot

### Reaalifunktion käänteisfunktio

Tunnetun funktion  $f$  käänteisfunktio  $g$  voidaan usein löytää ratkaisemalla yhtälö  $y = f(x)$  muuttujan  $x$  suhteen. Jos ratkaisu on yksikäsitteinen tietyillä arvoilla  $y$ , saadaan tästä käänteisfunktion lauseke muodossa  $x = g(y)$ .

Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

on määritelty, kun  $x \neq 3$ . Käänteisfunktio saadaan ratkaisemalla  $x$  yhtälöstä  $y = f(x)$ :

$$y = \frac{x-2}{x-3} \implies x = \frac{3y-2}{y-1}.$$

Ratkaisu on mahdollinen ja tulos yksikäsitteinen, jos  $y \neq 1$ . Käänteisfunktio on siis määritelty, kun sen argumentti on  $\neq 1$ . Kun tavanomaiseen tapaan merkitään funktion argumenttia  $x$ , on käänteisfunktion lauseke

$$g(x) = \frac{3x-2}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

Vaikka käänteisfunktio olisi olemassa, ei sille välttämättä saada lauseketta edellä esitetyllä menettelyllä. Esimerkiksi funktion

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^2}$$

tapauksessa jouduttaisiin ratkaisemaan viidennen asteen polynomiyhtälö  $x^5 - yx^2 - y = 0$ , mikä ei ole juurilausekkeiden avulla mahdollista. Tästä huolimatta käänteisfunktio on olemassa, mikä voidaan päätellä osoittamalla funktio  $f$  derivaatan avulla aidosti kasvavaksi. Tällöin  $f$  on bijektio  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ja käänteisfunktio siis olemassa. Alkeisfunktioiden avulla muodostettua lauseketta sille ei kuitenkaan saada.

■ funktio  
■  
käänteisfunktio  
■ yhtälö

■ yhtälö  
(polynomi-)  
■ juuri  
(murtopotenssi)  
■ derivaatta  
■ kasvava  
(funktio)  
■ bijektio

## Reaalifunktiot

5/5

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite

■ Sisältö

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ juuret, ■ polynomit, ■ rationaalifunktiot, ■ eksponenttifunktio, ■ logaritmifunktio, ■ trigonometriset funktiot, ■ arcus-funktiot, ■ hyperbelifunktiot, ■ area-funktiot

### Käänteisfunktion kuvaaja

Funktion  $f$  kuvaaja muodostuu niistä  $xy$ -tason pisteistä  $(x, y)$ , jotka toteuttavat yhtälön  $y = f(x)$ . Jos  $g$  on funktion  $f$  käänteisfunktio, ovat yhtälöt  $y = f(x)$  ja  $x = g(y)$  yhtäpitäviä, jolloin samat pisteet  $(x, y)$  toteuttavat ne.

■ kuvaaja

■  
koordinaatisto  
( $xy$ -)

Käänteisfunktion kuvaajaa piirrettäessä merkitään kuitenkin argumentiksi  $x$  ja funktion arvoksi  $y$ , jolloin piirrettävänä ovat ne pisteet, jotka toteuttavat yhtälön  $y = g(x)$ . Tämä poikkeaa edellisestä siten, että  $x$  ja  $y$  ovat vaihtaneet rooleja, jolloin käänteisfunktion  $g$  kuvaaja saadaan peilaamalla funktion  $f$  kuvaaja suorassa  $y = x$ .

■  
käänteisfunktio

