

Samapituisten merkkijonojen lukumäärä I

Olkoon tehtävänä muodostaa annetuista merkeistä (olioista, alkioista)

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

jonoja, joissa on p kappaletta merkkejä.

Jonoa muodostettaessa voidaan sen ensimmäinen merkki valita n eri tavalla: mikä tahansa merkeistä a_k kelpaa. Toinen merkki valitaan ensimmäisestä riippumatta ja sekin siis voidaan valita n eri tavalla. Kaksimerkkisiä jonoja on siten n^2 kappaletta. Koska kolmaskin merkki valitaan edellisistä riippumatta, voidaan kaksimerkkisten jonojen loppuun liittää mikä tahansa merkeistä ja jokainen jono siten jatkaa n eri tavalla: kolmimerkkisiä jonoja on kaikkiaan n^3 kappaletta.

Jatkamalla tällä tavoin päädytään seuraavaan tulokseen:

Jos käytettävissä on n erilaista merkkiä, näistä voidaan muodostaa p merkin pituisia jonoja n^p kappaletta.

Jonojen muodostaminen voi tapahtua noudattamalla jotakin johdonmukaista menetelmää. Jos esimerkiksi käytettävissä olevat merkit ovat a , b , c ja d , saadaan kolmimerkkisiä jonoja $4^3 = 64$ kappaletta. Nämä ovat

$aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd,$
 $aca, acb, acc, acd, ada, adb, adc, add,$
 $baa, bab, bac, bad, bba, bbb, bbc, bbd,$
 $bca, bcb, bcc, bcd, bda, bdb, bdc, bdd,$
 $caa, cab, cac, cad, cba, cbb, cbc, cbd,$
 $cca, ccb, ccc, ccd, cda, cdb, cdc, cdd,$
 $daa, dab, dac, dad, dba, dbb, dbc, dbd,$
 $dca, dcb, dcc, dcd, dda, ddb, ddc, ddd.$

Samapituisten merkkijonojen lukumäärä II

Olkoon tehtävänä muodostaa p merkkiä (oliota, alkiota) käsittävät jonot, joissa ensimmäinen merkki valitaan n_1 merkin kokoelmasta, toinen merkki n_2 merkin kokoelmasta jne.

Samalla ajattelulla kuin edellä päädytään seuraavaan: Ensimmäinen merkki voidaan valita n_1 tavalla. Tämän perään voidaan asettaa toinen merkki n_2 tavalla; kahden merkin jonoja on siten $n_1 n_2$ kappaletta. Jokaisen kaksimerkkisen jonon perään voidaan asettaa kolmas merkki n_3 tavalla; kolmen merkin jonoja on $n_1 n_2 n_3$ kappaletta.

Yleisesti:

Jos ensimmäiseen merkkiin on käytettävissä n_1 erilaista merkkiä, toiseen n_2 merkkiä, jne. on p -merkkisiä jonoja kaikkiaan $n_1 n_2 \dots n_p$ kappaletta.

Esimerkiksi kolmesta kirjaimesta ja kolmesta numerosta muodostuvia erilaisia rekisterinumeroita on $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,950\,300$ kappaletta, kun käytössä on 23 kirjainta ja ensimmäinen numero ei saa olla 0.

Joukon osajoukkojen lukumäärä

Joukossa A olkoon äärellisen monta alkioita, n kappaletta:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

■ joukko

■ alkio

Tämän osajoukot ovat joukkoja, joihin on otettu joitakin näistä alkioista. Esimerkiksi $\{a_1, a_3, a_7\}$ on osajoukko (mikäli n on vähintään 7). Yhden alkion muodostamat joukot ovat myös osajoukkoja, esimerkiksi $\{a_1\}$. Tyhjää joukkoa, so. joukkoa, jossa ei ole ainuttakaan alkioita, ja joukkoa A itseään pidetään myös osajoukkoina.

■ osajoukko

■ tyhjä joukko

Jokainen osajoukko voidaan esittää nolllista ja ykkösistä muodostuvalla jonolla, jossa on n merkkiä, so. yhtä monta merkkiä, kuin joukossa A on alkioita. Nolla tarkoittaa, että vastaava alkio ei kuulu osajoukkoon, ykkönen puolestaan, että se kuuluu. Jos $n = 7$, on osajoukon $\{a_1, a_3, a_7\}$ esitys 1010001. (Edellytyksenä on, että joukosta A poimitut alkioit luetellaan aina tietyssä, esimerkiksi kasvavan indeksin mukaisessa järjestyksessä.)

Kysymys osajoukkojen lukumäärästä pelkistyy tällöin kysymykseksi merkkijonojen lukumäärästä: Miten monta jonoa voidaan muodostaa merkeistä 0 ja 1, kun jonojen pituus on n ? Vakiopituisten jonojen lukumäärää koskevan tuloksen perusteella saadaan seuraavaa:

Jos joukossa on n alkioita, sen osajoukkojen lukumäärä on 2^n .

Järjestysten eli permutaatioiden lukumäärä

Olkoon annettuna n kappaletta merkkejä (olioita, alkioita)

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

jotka on järjestettävä kaikkiin mahdollisiin järjestyksiin. Näitä kutsutaan merkkien *permutaatioiksi*.

Permutaatioiden lukumäärä voidaan selvittää muodostamalla ne merkki kerrallaan. Ensimmäinen merkki voidaan valita n eri tavalla, koska kaikki merkit ovat tällöin käytettävissä. Toisen merkin valitsemiseen on enää $n - 1$ mahdollisuutta, koska yksi on jo käytetty; kolmas on valittava jäljellä olevista $n - 2$ merkistä, jne. Viimeisen merkin kohdalla ei enää ole valinnan varaa: se on on ainoa jäljellä oleva.

Permutaatioiden lukumäärä on sama kuin valintamahdollisuuksien lukumäärä kuvatussa muodostamisprosessissa:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Tätä kutsutaan n -kertomaksi ja merkitään $n!$.

■ kertoma

Tulokseksi saadaan siis:

n merkkiä voidaan järjestää $n!$ erilaiseen järjestykseen.

Järjestykset voidaan muodostaa jotakin johdonmukaista menetelmää käyttäen. Jos esimerkiksi merkkeinä ovat a, b, c ja d , on erilaisia järjestyksiä eli permutaatioita $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ kappaletta. Nämä ovat

$$\begin{aligned} &abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, \\ &bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, \\ &cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba, \\ &dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba. \end{aligned}$$

Järjestettyjen osajonojen lukumäärä

Olkoon annettuna n kappaletta merkkejä (olioita, alkioita)

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

joista on kaikilla mahdollisilla tavoilla poimittava p kappaletta ja esitettävä nämä kaikissa mahdollisissa järjestyksissä. Näitä kutsutaan toisinaan merkkien p -*variaatioiksi*.

Ensimmäinen merkki voidaan valita n eri tavalla, koska kaikki merkit ovat käytettävissä. Seuraava on valittava jäljellä olevista $n - 1$ merkistä, joten mahdollisuuksia on $n - 1$. Kolmatta merkkiä valittaessa mahdollisuuksia on $n - 2$. Kun näin jatketaan, on viimeiselle eli p :nnelle merkille $n - p + 1$ valintamahdollisuutta.

Mahdollisuuksia on kaikkiaan

■ kertoma

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

Siis:

n merkin p -variaatioiden lukumäärä on $n!/(n - p)!$.

Esimerkiksi merkeistä a, b, c, d voidaan poimia kahden merkin järjestettyjä jonoja $4!/(4 - 2)! = 12$ kappaletta. Nämä ovat

$$\begin{aligned} &ab, ac, ad, ba, bc, bd, \\ &ca, cb, cd, da, db, dc. \end{aligned}$$

p -alkioisten osajoukkojen eli kombinaatioiden lukumäärä

Olkoon annettuna n kappaletta merkkejä (olioita, alkioita)

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Tehtävänä on selvittää, monellako tavalla näistä voidaan poimia p kappaletta, kun huomiota ei kiinnitetä poimittavien merkkien keskinäiseen järjestykseen. Sama voidaan lausua toisin: Montako p alkion muodostamaa osajoukkoa joukolla $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ on?

■ osajoukko

■ joukko

Poimittavia p merkin yhdelmiä kutsutaan p -kombinaatioiksi.

Jos poimittavien merkkien keskinäinen järjestys otetaan huomioon, on kyseessä p -variaatioiden lukumäärä. Variaatioita on $n!/(n-p)!$ kappaletta. Näiden joukossa on kuitenkin sellaisia, joissa on samat merkit, mutta eri järjestyksissä. Koska tietyt p merkkiä voidaan järjestää $p!$ järjestykseen, on samat merkit sisältäviä järjestyksiä aina $p!$ kappaletta, jolloin p -kombinaatioiden määrä saadaan jakamalla p -variaatioiden määrä luvulla $p!$. Lukumäärä on siis

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Tätä kutsutaan myös binomikertoimeksi ja merkitään $\binom{n}{p}$.

■ binomikerroin

■ binomikerroin

Siis:

n alkion joukosta voidaan valita p kappaletta $\binom{n}{p}$ eri tavalla, kun järjestykseen ei kiinnitetä huomiota.

Esimerkiksi merkeistä a, b, c, d voidaan poimia kahden merkin yhdelmiä $\binom{4}{2} = 6$ kappaletta. Nämä ovat

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd.$$

Koska p -kombinaatiot ovat p -alkioisia osajoukkoja, tulee näiden lukumäärien summan olla sama kuin kaikkien osajoukkojen lukumäärä, kun huomioon otetaan kaikki mahdolliset arvot p , ts. $p = 0, 1, \dots, n$. On siis oltava

■ summamer-
kintä

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

Tämä on erikoistapaus binomikaavasta $(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$, kun asetetaan $x = y = 1$.

■ binomikaava

■ binomikaava

Toisiaan leikkaavien joukkojen alkioiden lukumäärä

Merkitään äärellisen monesta alkioista muodostuvan joukon B alkioiden lukumäärää $N(B)$.

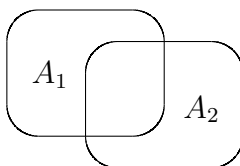
■ alkio
■ joukko

Olkoot A_1, A_2, \dots, A_n äärellisen monen alkion muodostamia joukkoja. Jos joukoissa on yhteisiä alkioita, ts. ne leikkaavat toisiaan, joukkojen unioniin kuuluvien alkioiden määrää laskettaessa joudutaan ottamaan huomioon yhteisten alkioiden lukumäärät.

■ unioni
■ leikkaus

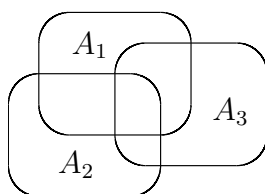
Kahden joukon A_1, A_2 tapauksessa tulos on yksinkertainen:

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2).$$



Kolmen joukon tapauksessa tulos on myös pääteltävissä kuviosta:

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_2 \cap A_3) - N(A_3 \cap A_1) \\ + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$



Joukkojen määrän kasvaessa tilanne tulee monimutkaisemmaksi, mutta edeltä ilmenevä periaate on yleistettävissä summamerkintää käyttäen:

■ summamerkintä

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup \dots \cup A_n) \\ = \sum_{1 \leq k \leq n} N(A_k) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} N(A_j \cap A_k) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$