

Vektorigeometriaa

1/3

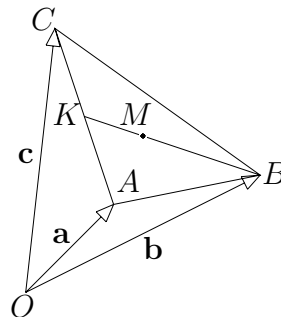
ESITIEDOT: ■ vektori, ■ vektorialgebra, ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ kolmio, ■ kulma, ■ ympyrä

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki 1 vektorigeometriasta

Kolmion keskijanojen leikkaaminen samassa pisteessä voidaan helposti todistaa vektorigeometrian menetelmin.



■ kolmio
■ keskijana
(esimerkki)
■ keskijana
(esimerkki)
■ keskijana

Kolmion kärkipisteet olkoot A , B ja C ja olkoot kiinteästä pisteestä O näihin pisteisiin osoittavat vektorit \mathbf{a} , \mathbf{b} ja \mathbf{c} (pisteiden paikkavektorit). Olkoon K janan AC keskipiste ja valitaan piste M keskijanalta BK siten, että $|KM| : |MB| = 1 : 2$. Tällöin saadaan seuraavat vektoriesitykset:

■ paikkavektori
■ yhteenlasku
(vektorien)
■ skalaarilla
kertominen
(vektorien)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}); \\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Vektorin \overrightarrow{OM} esitys on siis symmetrinen vektoreiden \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} suhteen, ts. samaan tulokseen tultaisiin laskemalla vektoriesitys millä tahansa keskijanalla sijaitsevalle pisteelle, joka jakaa kyseisen janan suhteessa 1 : 2. Tästä seuraa, että näiden jakopisteiden tulee yhtyä, jolloin väite tulee todistetuksi.

Vektorigeometriaa

2/3

ESITIEDOT: ■ vektori, ■ vektorialgebra, ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora, ■ taso

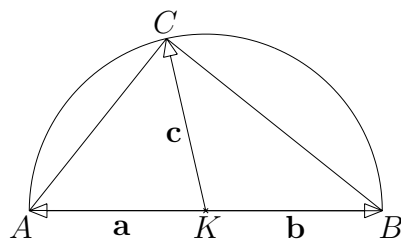
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ kolmio, ■ kulma, ■ ympyrä

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki 2 vektorigeometriasta

Olkoon todistettavana, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

■ ympyrä
■ kehäkulma (esimerkki)
■ kehäkulma



Puoliympyrän säde olkoon r . Keskipisteestä K halkaisijan AB päätepisteisiin osoittavat vektorit olkoot \mathbf{a} ja \mathbf{b} ; kummankin pituus on r ja $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Sijaitkoon piste C jossakin puoliympyrän kehällä. Keskipisteestä tähän osoittava vektori olkoon \mathbf{c} , jonka pituus myös on r .

■ vektori

Kulma ACB on tällöin puoliympyrän sisältämä kehäkulma. Sen kylkivektoreiden skalaaritulo on

■ skalaaritulo

$$(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (-\mathbf{a} - \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = -r^2 + r^2 = 0.$$

Koska skalaaritulo on $= 0$, on vektoreiden välinen kulma suora.

Vektorigeometriaa

3/3

ESITIEDOT: ■ vektori, ■ vektorialgebra, ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ kolmio, ■ kulma, ■ ympyrä

■ Sisältö

■ Hakemisto

Esimerkki 3 vektorigeometriasta

Vesipisara putoaa tasolle $x + 2y + 3z = 4$ pisteeseen $(-3, -1, 3)$ ja alkaa valua tasoa pitkin. Missä pisteessä se kohtaa xy-tason? Oletetaan tavanomaiseen tapaan, että z-akseli on pystysuora ja osoittaa ylöspäin, jolloin painovoima vaikuttaa negatiivisen z-akselin suuntaan.

Merkitään putoamispisteen paikkavektoria $\mathbf{p} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Tason normaalivektori on $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Koska z-akselin suuntainen kantavektori \mathbf{k} on pystysuora, saadaan ristitulon avulla vaakasuora tason suuntainen vektori $\mathbf{s} = \mathbf{k} \times \mathbf{n} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Pisaran valumissuunta on kohtisuorassa tason normaalivektoria vastaan ja toisaalta se on mahdollisimman jyrkkä, jolloin sen tulee olla kohtisuorassa myös edellä muodostettua vektoria \mathbf{s} vastaan. Valumissuunta — tai mahdollisesti vastakkainen suunta — sadaan ristitulosta

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Tämä on todellakin valumissuunta, koska \mathbf{k} -komponentti on negatiivinen; ristitulo $\mathbf{n} \times \mathbf{s}$ olisi antanut vastakkaisen suunnan.

Paikkavektori, joka osoittaa origosta siihen pisteeseen, missä pisara kohtaa xy-tason, on siis muotoa

$$\mathbf{p} + \alpha \mathbf{v} = (-3 + 3\alpha)\mathbf{i} + (-1 + 6\alpha)\mathbf{j} + (3 - 5\alpha)\mathbf{k}.$$

Koska piste sijaitsee xy-tasossa, tulee olla $3 - 5\alpha = 0$ eli $\alpha = \frac{3}{5}$. Pisteen x- ja y-koordinaatit ovat tällöin

$$x = -3 + 3\alpha = -\frac{6}{5}, \quad y = -1 + 6\alpha = \frac{13}{5}.$$

■ taso (yhtälö)

■
koordinaatisto
(xyz-)

■ paikkavektori

■
normaalivektori
(tason)

■ kantavektori

■ ristitulo

■ vektoritulo

■ vektoritulon
laskeminen