

Toisen asteen pinnat

ESITIEDOT: ■ pinta

KATSO MYÖS: ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö

1/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

Toisen asteen pinta

Toisen asteen pinnaksi kutsutaan pintaa, jonka yhtälö kolmiulotteisessa xyz-koordinaatistossa on toista astetta muuttujien x , y ja z suhteen. Yhtälön yleinen muoto on

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0,$$

missä $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ ja K ovat vakioita.

Pinnat, joita yhtälö voi esittää, jaotellaan ellipsoidi-, hyperboloidi-, paraboloidi- ja lieriötyyppeihin. Lisäksi tulevat kysymykseen näiden erilaiset surkastumat, kuten piste, suora, taso, kaksi leikkaavaa tai kaksi yhdensuuntaista tasoa. On myös mahdollista, että yhtälö ei esitä geometrisesti mitään (ts. minkään pisteen koordinaatit (x, y, z) eivät toteuta yhtälöä).

■ pinta

■ yhtälö

■
koordinaatisto
(xyz-)

■ suora (kolmiulotteinen)

■ taso (yhtälö)

Toisen asteen pinnat

ESITIEDOT: ■ pinta

KATSO MYÖS: ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö

2/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

Ellipsoidi

Ellipsoidin yhtälö on muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

missä a , b ja c ovat vakioita ($\neq 0$). Mikäli kaksi näistä on yhtä suuria, kyseessä on *pyörähdysellipsoidi*, joka syntyy ellipsin pyörähtäessä jommankumman akselinsa ympäri. Jos kaikki vakiot ovat yhtä suuria, kyseessä on pallo.

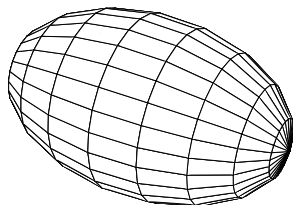
■ ellipsoidi
(tilavuus)

■ yhtälö

■
koordinaatisto
(xyz-)

■ ellipsi

■ pallo



Toisen asteen pinnat

ESITIEDOT: ■ pinta

KATSO MYÖS: ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö

3/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

Hyperboloidit

Muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

oleva toisen asteen yhtälö, missä a , b ja c ovat mitä tahansa nollasta eroavia vakioita ja $d = 1, -1$ tai 0 , esittää hyperboloidityypin pintaa.

Jos $d = 1$, kyseessä on *yksivaippainen hyperboloidi*; jos $d = -1$, pinta on *kaksi-vaippainen hyperboloidi*. Jos $d = 0$, kyseessä on näiden väliin jäävä *kartiopinta*, jota kutsutaan myös hyperboloidien *asymptoottikartioksi*.

Jos kartiotapauksessa $a = b$, saadaan suora ympyräkartio, ts. pinnan poikkileikkaus akselia vastaan kohtisuoralla tasolla on ympyrä.

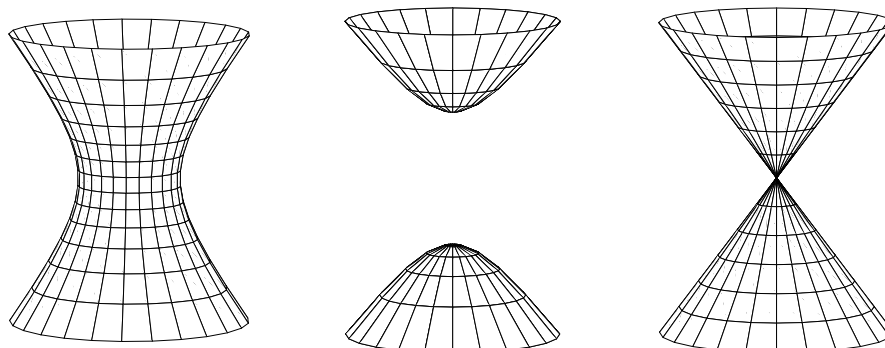
■ yhtälö

■
koordinaatisto
(xyz-)

■ hyperbeli

■ kartiopinta

■ ympyräkartio
(suora)



Toisen asteen pinnat

ESITIEDOT: ■ pinta

KATSO MYÖS: ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö

4/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

Paraboloidit

Yhtälö

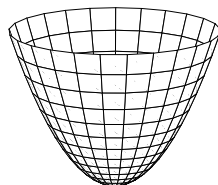
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z,$$

missä p ja q ovat vakioita ($\neq 0$), esittää *elliptistä paraboloidia*. Jos $p = q$, kyseessä on *pyörähdysparaboloidi*, joka syntyy, kun paraabeli pyörähtää akselinsa ympäri.

■ yhtälö

■
koordinaatisto
(xyz-)

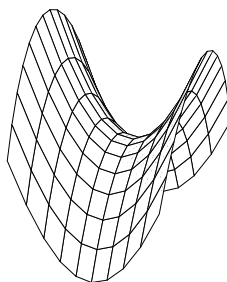
■ paraabeli



Yhtälö

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z,$$

missä jälleen p ja q ovat nollasta eroavia vakioita, esittää *hyperbolista paraboloidia* eli *satulapintaa*. Jos $p = q = 1$, saadaan pinta $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, joka on yhtenevä pinnan $z = xy$ kanssa.



Toisen asteen pinnat

ESITIEDOT: ■ pinta

KATSO MYÖS: ■ toisen asteen käyrät, ■ pallo, ■ kartio ja lieriö

5/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

Lieriöt

Toista astetta olevien lieriöpintojen perustyyppit ovat *elliptinen lieriö*, *parabolinen lieriö* ja *hyperbolinen lieriö*, joiden yhtälöt ovat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = ax^2.$$

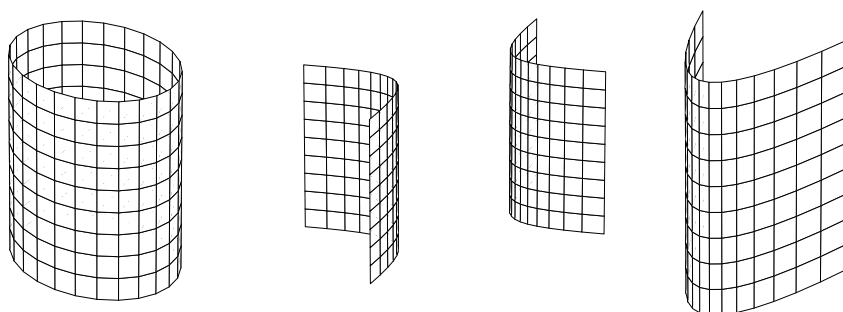
Jos elliptisessä lieriössä on $a = b$, saadaan suora ympyrälieriö, jonka poikkileikkaus akselia vastaan kohtisuoralla tasolla on ympyrä.

■ lieriöpinta

■ yhtälö

■
koordinaatisto
(xyz-)

■ ympyrälieriö
(suora)



Eo. yhtälöt ovat samoja kuin xy-tason ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöt. Koska ne eivät lainkaan sisällä muuttujaa z , niiden tulkitseminen kolmiulotteisen avaruuden pinnoiksi merkitsee, että jos piste $(x, y, 0)$ on kyseisellä xy-tason käyrällä, niin piste (x, y, z) on pinnalla z -arvosta riippumatta. Pinnat ovat siis lieriöpintoja, jotka syntyvät siten, että pystysuorassa asennossa liikkuva suora tukeutuu kyseiseen xy-tason käyrään.

■ ellipsi

■ hyperbeli

■ paraabeli