

## Synteettistä geometriaa

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ kolmio, ■ kulma, ■ ympyrä

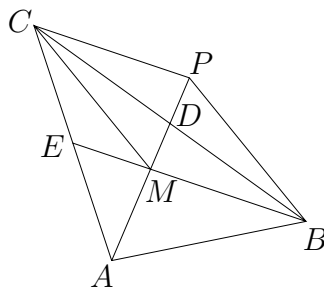
1/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkki 1 synteettisestä geometriasta

Olkoon tehtävänä todistaa, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa kunkin keskijanan suhteessa 2 : 1 kärjestä vastaisen sivun keskipisteeseen lukien.



■ kolmio

■ keskijana  
(esimerkki)

■ keskijana  
(esimerkki)

■ keskijana

Kolmion  $ABC$  kaksi keskijanaa olkoot  $AD$  ja  $BE$  ja näiden leikkauspiste  $M$ . Tavoitteena on osoittaa, että  $|BM| : |ME| = 2 : 1$ . Tätä varten tehdään seuraava apupiirros: Jatketaan keskijanaa  $AD$  osan  $MD$  pituisella janalla  $DP$ . Yhdistetään piste  $P$  pisteisiin  $B$  ja  $C$  sekä piste  $C$  pisteeseen  $M$ .

Keskijanan määritelmän mukaan ovat janat  $BD$  ja  $DC$  yhtä pitkät; apukonstruktiosta seuraa, että myös  $MD$  ja  $DP$  ovat yhtä pitkät. Kolmiot  $MDC$  ja  $PDB$  ovat tällöin yhtenevät (SKS), mistä seuraa, että janat  $BP$  ja  $MC$  ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset. Nelikulmio  $BPCM$  on siis suunnikas. Suunnikkaan vastakaisina sivuina ovat janat  $BM$  ja  $PC$  yhtä pitkät.

■ yhtenevyys  
(kolmioiden)

■ suunnikas

■ yhdenmuotoisuus  
(kolmioiden)

■ yhdenmuotoisuussuhde

Kolmiot  $APC$  ja  $AME$  ovat yhdenmuotoiset (KK), koska suorat  $BM$  ja  $PC$  ovat suunnikkaan sivuina yhdensuuntaiset. Yhdenmuotoisuussuhde on 2, koska jana  $AC$  on kaksi kertaa janan  $AE$  pituinen. Tällöin pätee janojen pituuksille myös  $|ME| = \frac{1}{2}|PC| = \frac{1}{2}|BM|$ , jolloin  $|BM| : |ME| = 2$ .

Vastaavasti voidaan osoittaa, että piste  $M$  jakaa janan  $AD$  suhteessa 2 : 1.

Toistamalla päättely siten, että keskijanan  $AD$  sijasta käytetään kärjestä  $C$  lähtevää keskijanaa  $CF$ , todetaan, että kaikki keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä  $M$ , joka jakaa keskijanat suhteessa 2 : 1.

Esitetty todistus lepää kolmioiden yhtenevyyttä ja yhdenmuotoisuutta koskevien tulosten varassa. Tämä on tyypillistä matemaattisille todistuksille yleensäkin: Tulosten — lauseiden tai teoreemojen — todistamisessa nojaututaan aiemmin todistettuihin lauseisiin. Jostakin on kuitenkin lähdettävä liikkeelle. Pohjana ovat tällöin ns. aksioomat, lausumat, joita sovitaan pidettävän tosina. Elementaarigeometriassa niiden voidaan sanoa olevan tosia 'itsestäänselvyytensä' takia; yleisemmin voidaan sanoa, että ne ovat tosia, koska tarkastelun kohde tulee määritellyksi sen kautta, että esitetty aksioomat ovat voimassa!

■ aksiooma

■ aksiooma

## Synteettistä geometriaa

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ kolmio, ■ kulma, ■ ympyrä

2/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkki 2 synteettisestä geometriasta

Olkoon tehtävänä konstruoida ne tason pisteet, joista katsottaessa annettu jana näkyy annetun suuruudessa kulmassa. Välineiksi sallitaan viivoitin ja harppi klassisen geometrian tapaan.

■ jana

■ kulma (taso-)

Olkoon siis annettuna jana  $AB$  ja kulma  $\alpha$  ( $< 180^\circ$ ). Tehtävä voidaan ratkaista seuraavasti:

Piirretään janalle  $AB$  keskinormaali, so. suora, joka on kohtisuorassa janaa vastaan ja kulkee sen keskipisteen  $K$  kautta. Tämä voidaan tehdä harpilla ja viivoittimella.

■

keskinormaali  
(janan)

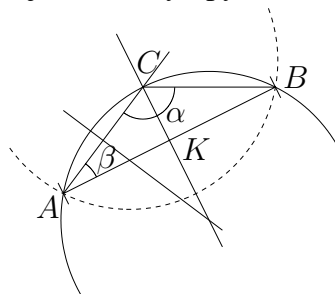
Piirretään kulma, jonka kärkenä on piste  $A$ , toisena kylkenä jana  $AB$  ja jonka suuruus on  $\beta = 90^\circ - \alpha/2$ ; tämäkin voidaan tehdä harpilla ja viivoittimella. Kulman toisen kyljen ja keskinormaalien leikkauspiste olkoon  $C$ .

Piirretään ympyrä, joka kulkee pisteiden  $A$ ,  $C$  ja  $B$  kautta. Tämä voidaan tehdä etsimällä janojen  $AB$  ja  $AC$  keskinormaalit, joiden leikkauspiste on ympyrän keskipiste.

■ ympyrä

Etsityt pisteet sijaitsevat ympyränkaarella  $ACB$  tai tämän kanssa symmetrisellä janan  $AB$  toisella puolella sijaitsevalla ympyrän kaarella.

■ kaari



Ratkaisu vaatii perustelut: Miksi on saatu juuri ne pisteet, joita etsittiin?

Kulman  $ACB$  suuruus on  $2(90^\circ - \beta) = \alpha$ . Piste  $C$  on siis ainakin yksi etsityistä pisteistä. Samaa jännettä vastaavat ympyrän kehäkulmat ovat yhtä suuria (= puolet vastaisen kaaren asteluvusta); jana  $AB$  näkyy siis samansuuruisessa kulmassa jokaisesta kaaren  $ABC$  pisteestä.

■ jänne

■ kehäkulma  
(esimerkki)

■ kehäkulma

Vastaava tilanne kulman  $\alpha$  ollessa pienempi (symmetrinen ympyränkaari puuttuu):

