

Kulma

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ taso, ■ ympyrä, ■ pallo

KATSO MYÖS: ■ vektorialgebra

1/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Tasokulma

Olkoon annettuna tason piste K ja kaksi tästä pisteestä alkavaa puolisuoraa. Puolisuorien väliin jäävää aluetta kutsutaan *kulmaksi*. Piste K on kulman *kärki*, puolisuorat ovat sen *kyljet*. Kylkien väliin jäävä tason osa on kulman *aukeama*.

■ puolisuora

Itse asiassa eo. määrittely on puutteellinen, koska ei ole selvää, kumpaa kahdesta mahdollisesta alueesta kulmaksi kutsutaan. Yleensä tarkoitetaan pienempää vaihtoehtoa, mutta oikeastaan on ajateltava, että määritellyksi tulee kaksi kulmaa.



Jos em. puolisuorat yhtyvät, saadaan määritellyksi kaksi kulmaa, joista pienempiä on luonnollista kutsua *nollakulmaksi* ja suurempaa *täydeksi kulmaksi*.

Kulman suuruutta mitataan usein *asteilla*, jolloin täyden kulman suuruus on 360 astetta, merkintä 360° . Yksi aste jaetaan 60 minuuttiin ja yksi minuutti edelleen 60 sekuntiin; merkinnät ovat seuraavat: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Jos kulman kyljet ovat kärjestä vastakkaisille puolille suuntautuvia puolisuoria, kyseessä on *oikokulma*, jonka suuruus on 180° . Jos kyljet ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, (pienempi) kulma on *suora kulma* suuruudeltaan 90° .

Jos kulman suuruus on alle 90° , sitä sanotaan *teräväksi*; välillä $90^\circ \dots 180^\circ$ oleva kulma on *tylppä*. Alle 180° oleva kulma on *kovera*, yli 180° oleva kulma *kupera*.

Jos kaksi suoraa leikkaa toisensa, rinnakkain olevat kulmat, joiden summa on 180° , ovat *vieruskulmia*. Vastakkain olevat yhtä suuret kulmat ovat *ristikulmia*.

Kaksi kulmaa, joiden summa on 90° , ovat toistensa *komplementtikulmia*. Nimitys tulee esiin mm. trigonometrinen funktioiden nimissä: kosini = komplementtikulman sini.

■ trigonometrinen funktio (suorakulmaisessa kolmiossa)

Jos kulmien summa on 180° , puhutaan vastaavasti *suplementtikulmista*, ja jos summa on 360° , *eksuplementtikulmista*.

■ trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

Kulma

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ taso, ■ ympyrä, ■ pallo

KATSO MYÖS: ■ vektorialgebra

2/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Kulman mittaaminen

Täsmällinen kulman suuruuden määrittely edellyttää, että toinen kulman kyljistä sovitaan alkukyljeksi ja toinen loppukyljeksi. Kulman suuruus on positiivinen, jos alkukyljeltä loppukyljelle kierretään vastapäivään, ns. positiiviseen kiertosuuntaan. Myötäpäivään eli negatiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä kulman suuruus on negatiivinen. Sallittua on myös kiertää ylimääräisiä täysiä kierroksia, jolloin kulman asteluku voi olla yli 360° tai alle -360° .

■ kiertosuunta
(positiivinen)

Paitsi asteita kulman suuruuden mittaamiseen käytetään muitakin yksikköjä. Eräs mahdollisuus on käyttää ns. *graadeja*, jolloin täyden kulman suuruus on 400 graadia. Toinen eräissä yhteyksissä yleisesti käytetty yksikkö on *piiru*, jolloin täyden kulman suuruus on 6000 piirua.

Teoreettisissa yhteyksissä, mm. matematiikassa yleisimmin käytetty yksikkö on *radiaani*. Kulman suuruus radiaaneissa saadaan piirtämällä kulman aukeaman alueelle ympyränkaari keskipisteenä kulman kärki. Kulman suuruus radiaaneina on kulman aukeamaan jäävän ympyränkaaren pituuden ja ympyrän säteen suhde. Täyden kulman suuruus on ympyrän kehän pituus jaettuna säteellä, siis 2π .

■ ympyrä

Asteiden ja radiaanien välinen vastaavuus saadaan yksinkertaisesta verrannosta

■ verranto

$$\frac{\text{suuruus asteissa}}{360} = \frac{\text{suuruus radiaaneissa}}{2\pi}.$$

Erityisesti on $1 \text{ rad} \approx 57.296^\circ$.

Matemaattiset tietokoneohjelmat edellyttävät yleensä, että trigonometrinen funktioiden argumentit annetaan radiaaneissa. Jos halutaan käyttää asteita, on käyttäjän itsensä huolehdittava tarvittavasta muunnoksesta. Laskimissa sen sijaan on yleensä erikseen toimintamoodit radiaaneille ja asteille, mahdollisesti muillekin kulmayksiköille.

■
trigonometrinen
funktio (yleinen
määritelmä)

Trigonometrisille funktioille voidaan muodostaa sarjakehitelmät, joista näiden arvoja voidaan laskea. Nämä on aina tapana esittää sellaisessa muodossa, että argumentin oletetaan olevan radiaaneissa.

■ sarja

Kulma

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ taso, ■ ympyrä, ■ pallo

KATSO MYÖS: ■ vektorialgebra

3/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

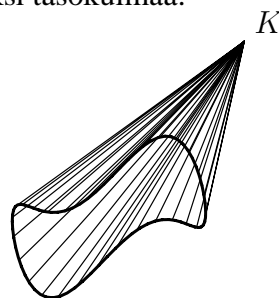
Avaruuskulma

Kiinnitetään jokin kolmiulotteisen avaruuden piste K kulman kärjeksi. Olkoon avaruudessa lisäksi annettuna riittävässä määrin säännöllinen sulkeutuva käyrä (esimerkiksi ympyrä), joka ei kulje pisteen K kautta. Asetetaan pisteestä K alkavat puolisuorat, jotka kulkevat käyrän jonkin pisteen kautta. Puolisuorat muodostavat pinnan, jota kutsutaan yleiseksi kartiopinnaksi. Tämä rajaa avaruuden kahteen — pienempään ja isompaan — *avaruuskulmaan* samaan tapaan kuin tasokulman kyljet rajaavat kaksi tasokulmaa.

■ käyrä
(avaruus-)

■ kartiopinta

■ kartiopinta



Avaruuskulman suuruus määritellään asettamalla pallo siten, että sen keskipisteenä on kulman kärki. Kulman suuruus on pallon pinnasta kulman sisään (sen aukeamaan) jäävän osan pinta-alan suhde pallon säteen neliöön. Yksikköä kutsutaan nimellä *steradiaani*.

■ pallo

Täyden avaruuskulman suuruus on pallon pinta-ala jaettuna pallon säteen neliöllä, ts. 4π steradiaania.

■ pallo (ala)

Olkoon esimerkkinä avaruuskulma, jonka kärkenä on origo ja em. sulkeutuvana käyränä pisteitä $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ yhdistävät kolmion sivut. Avaruuskulmaa rajaavat puolisuorat sijaitsevat tällöin koordinaattitasoissa. Pienempi avaruuskulma muodostuu siitä avaruuden kahdeksanneksesta, jonka pisteiden koordinaatit ovat ≥ 0 . Suuruus on $\pi/2$ steradiaania.

■
koordinaatisto
(xyz-)

■
koordinaattitaso

Kulma

ESITIEDOT: ■ piste, ■ suora, ■ taso, ■ ympyrä, ■ pallo

KATSO MYÖS: ■ vektorialgebra

4/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

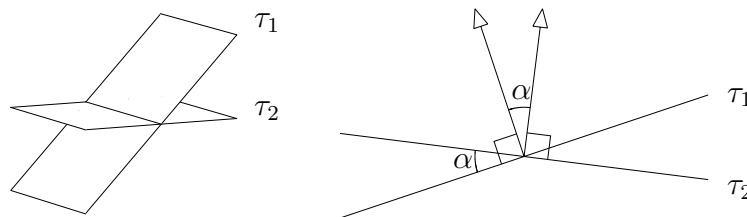
Diedrikulma

Kahden toisiaan leikkaavan tason välistä kulmaa — yleensä pienempää kahdesta mahdollisesta — kutsutaan tasojen *diedrikulmaksi*.

Sen suuruutta mitataan asettamalla tasojen leikkaussuoraa vastaan kohtisuora taso. Alkuperäiset tasot leikkaavat tätä pitkin kahta suoraan ja näiden välisen (pienemmän) tasokulman suuruus on diedrikulman suuruus.

■ taso

■ suora



Diedrikulman suuruus voidaan helposti laskea määrittämällä ensin tasojen normaalivektorit. Näiden välinen kulma on joko pienempi tai isompi diedrikulma siitä riippuen, kummalle puolen tasoja normaalivektorit osoittavat.

■
normaalivektori
(tason)

Esimerkiksi tasojen $x + 2y + 3z = 4$ ja $4x - 3y + 2z = -1$ normaalivektorit saadaan muuttujien kertoimista:

■ taso (yhtälö)

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_2 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Skalaaritulon avulla voidaan laskea näiden välinen kulma ϑ :

■ skalaaritulo

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{406}}$$

ja siis $\vartheta \approx 1.37 \text{ rad} \approx 78.5^\circ$.