

Sijoitusmenettely

Annetun funktion integraalifunktiota laskettaessa funktiota pyritään muuntaamaan siten, että tulos voidaan tunnistaa jonkin alkeisfunktion derivaataksi. Usein muuntaminen joudutaan tekemään useassa vaiheessa.

Tärkein menettely on sopivan *sijoituksen* tekeminen integraaliin. Kyseessä voi olla integraalifunktion etsiminen, jolloin integroimismuuttuja vaihdetaan toiseksi, tai määrätyn integraalin laskeminen, jolloin lisäksi muunnetaan rajat. Menettely pohjautuu yhdistetyn funktion derivoimissääntöön.

Sijoitusmenettely on seuraava:

Olkoon laskettavana integraali $\int f(x) dx$ tai $\int_a^b f(x) dx$.

Valitaan uusi muuttuja t , jota sitoo vanhaan muuttujaan x yhtälö $x = g(t)$. Tässä funktio g valitaan päämääränä saada integraali yksinkertaistumaan. Derivoimalla saadaan

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{eli} \quad dx = g'(t) dt,$$

missä derivaattasymbolia $\frac{dx}{dt}$ on käsitelty ikäänkuin se olisi osamäärä. Jos kyseessä on määrätty integraali, ratkaistaan lisäksi muuttujalle t rajat α ja β yhtälöistä $a = g(\alpha)$ ja $b = g(\beta)$.

Sijoitetaan tulokset integraaliin:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt \quad \text{tai} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt.$$

Sijoitus voidaan aivan yhtä hyvin tehdä uuden muuttujan t suhteen ratkaistuista muodoista, mikäli tämä on helpompaa: $t = h(x)$, $dt = h'(x) dx$, $\alpha = h(a)$, $\beta = h(b)$.

■
integraalifunktio
■ derivointi (alkeisfunktioiden)

■ määrätty
integraali
■ derivaatta
(yhdistetyn
funktion)

■ yhtälö

Esimerkkejä sijoitusmenetelmästä I

1) Integraali

■
integraalifunktio

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 1}$$

voidaan palauttaa arctan-funktion derivaatan integroimiseen sijoittamalla $t = \sqrt{2}x$, jolloin $dt = \sqrt{2}dx$:

■ arcus-funktio
■ integrointi
(kaavat)
■ integrointi
(kaavat)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 + 1} &= \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + C. \end{aligned}$$

Lopuksi on siis palattu takaisin alkuperäiseen muuttujaan x .

2) R -säteisen puoliympyrän ala voidaan laskea integraalista

■ ympyrä
(esimerkki)
■ ympyrä
■ ympyrä (ala)
■ määrätty
integraali
■ pinta-ala
(integroimalla)
■ trigonometria
(johdannais-
kaavat)

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Tämä saadaan lasketuksi sijoittamalla $x = R \sin t$, jolloin $dx = R \cos t dt$. Yläraja muunnetaan ratkaisemalla yhtälö $R = R \sin t$; tällä on useita ratkaisuja, mutta luontevinta on valita arcsin-funktion päähaaran mukainen arvo $t = \pi/2$. Alarajan muuntaminen antaa vastaavasti $t = -\pi/2$. Tulosta voidaan sieventää trigonometrian kaavoilla:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 t dt = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \\ &= R^2 \left/ \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \sin 2t) \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \pi R^2. \end{aligned}$$

Esimerkkejä sijoitusmenetelmästä II

3) Hieman hankalampana esimerkkinä olkoon seuraava, missä integraali aluksi jaetaan kahteen osaan:

$$\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{2}{2 + \cos x} dx + \int \frac{-\sin x}{2 + \cos x} dx.$$

Tässä jälkimmäiseen sijoitetaan $t = 2 + \cos x$, jolloin $dt = -\sin x dx$. Syynä on se, että osoittaja on sama kuin nimittäjän derivaatta ja osoittajassa on siis suoraan dt . Edelliseen integraaliin sijoitetaan hieman erikoisempaa: $u = \tan(x/2)$ eli $x = 2 \arctan u$, jolloin

$$dx = \frac{2 du}{1 + u^2}.$$

Trigonometrian kaavojen avulla voidaan osoittaa, että

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Integraali muuntuu siis muotoon

$$\int \frac{2}{2 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}} \frac{2 du}{1 + u^2} + \int \frac{dt}{t} = \int \frac{4}{u^2 + 3} du + \int \frac{dt}{t}.$$

Jälkimmäinen integroituu suoraan logaritmiksi. Edellinen voidaan sijoituksella $u = \sqrt{3} v$, $du = \sqrt{3} dv$ palauttaa arctan-funktioon:

$$\int \frac{4\sqrt{3}}{3(v^2 + 1)} dv + \int \frac{dt}{t} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan v + \ln t + C.$$

Palaamalla alkuperäiseen muuttujaan x saadaan

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan(u/\sqrt{3}) + \ln t + C \\ = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan(x/2)\right) + \ln(2 + \cos x) + C. \end{aligned}$$

■
integraalifunktio

■ trigonometria
(johdannais-
kaavat)

■ arcus-funktio
■ integrointi
(kaavat)
■ integrointi
(kaavat)

Osittaisintegrointi

Toinen tärkeä menettely integraalien laskemisessa on *osittaisintegrointi*. Tätäkin voidaan käyttää sekä integraalifunktion etsimiseen että määrättyjen integraalien laskemiseen. Perustana on tulon derivoimiskaava kirjoitettuna muotoon $u'v = \frac{d}{dx}(uv) - uv'$. Integroimalla tämä saadaan osittaisintegroinnin kaavat

$$\begin{aligned}\int u'(x)v(x) dx &= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx, \\ \int_a^b u'(x)v(x) dx &= \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.\end{aligned}$$

Osittaisintegroinnissa muunnetaan siis integraali $\int u'v$ integraaliksi $\int uv'$ sekä integraalia sisältämättömäksi lisätermiksi. Kaavoja sovellettaessa on alkuperäinen integroitava funktio tulkittava funktioiden u' ja v tuloksi siten, että muunnettu integraali on muodostettavissa, ts. funktio u (jonka derivaatta u' tunnetaan) voidaan helposti laskea. Lisäksi tavoitteena tietenkin on, että muunnettu integraali olisi yksinkertaisempi.

■
integraalifunktio
■ määrätty
integraali
■ derivaatta
(tulon)

Esimerkkejä osittaisintegroinnista

1) Integraali

■
integraalifunktio

$$\int x^2 e^x dx$$

voidaan laskea kahdella peräkkäisellä osittaisintegroinnilla. Ensimmäinen antaa seuraavaa:

$$\int \underbrace{x^2}_v \underbrace{e^x}_{u'} dx = \underbrace{x^2}_v \underbrace{e^x}_u - \int \underbrace{2x}_{v'} \underbrace{e^x}_u dx.$$

Kun saatuun integraaliin sovelletaan uudelleen osittaisintegrointia saadaan kaikkiaan

$$\begin{aligned} x^2 e^x - \int \underbrace{2x}_v \underbrace{e^x}_{u'} dx &= x^2 e^x - \underbrace{2x}_v \underbrace{e^x}_u + \int \underbrace{2}_{v'} \underbrace{e^x}_u dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

2) Integroitavan funktion tulkitseminen sopivaksi tuloksi edellyttää toisinaan lausekkeen hahmottamista uudella tavalla. Logaritmifunktio voidaan integroida osittaisintegroinnin avulla seuraavasti:

■ määrätty
integraali■
logaritmifunktio

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\ln x}_v dx = \int_1^e \underbrace{x}_u \underbrace{\ln x}_v - \int_1^e \underbrace{x}_u \underbrace{(1/x)}_{v'} dx \\ &= e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

3) Lukija miettiköön, mitä vikaa on seuraavassa päättelyssä: Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} + \int x \cdot \frac{1}{x^2} = 1 + \int \frac{1}{x} dx.$$

Siis

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx,$$

mistä seuraa $0 = 1$, kun integraalit supistetaan pois.