

Massakeskipiste

ESITIEDOT: ■ keskiarvo, ■ määrätty integraali

KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikka, ■ hitausmomentti

1/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

Massakeskipisteen määrittely

Kappaleen *massakeskipiste* eli *painopiste* kuvaa massan keskimääräistä sijaintia. Jos kappale ripustetaan massakeskipisteestä, se pysyy millään tavoin kiertymättä siinä asennossa, johon se asetetaan. Kappaleeseen vaikuttavan painovoiman momentti tämän pisteen suhteen on siis $= 0$.

Massakeskipisteen koordinaatit voidaan laskea massajakaumalla painotettuina keskiarvoina. Tämä tarkoittaa seuraavaa:

Jaetaan kappale pieniin osiin, esimerkiksi pikku kuutioihin, joiden särmät ovat kolmiulotteisen xyz-koordinaatiston akselien suuntaiset. Merkitään k :nnessa pikku kuutiossa olevaa massaa Δm_k ja sen sijaintia, esimerkiksi keskipisteen koordinaatteja (x_k, y_k, z_k) . Keskipisteiden x-koordinaattien keskiarvo massajakaumalla painotettuna on

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta m_k}{\sum_{k=1}^n \Delta m_k} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n x_k \Delta m_k,$$

missä $m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k$ on kappaleen kokonaismassa.

Kyseessä on eräänlainen Riemannin summa, joka pikku kuutioiden muodostamaa jakoa tihennettäessä johtaa integraaliin. Yleisessä tapauksessa kyseessä on integraali kolmiulotteisen avaruuden alueen, nimittäin kyseessä olevan kappaleen yli. Erikoistapauksissa se on kuitenkin pelkistettävissä reaaliakselin suljetun välin yli otetuksi integraaliksi, kuten myöhempana oleva esimerkki osoittaa. Integraali antaa massakeskipisteen x-koordinaatin X_0 .

Vastaavalla tavalla saadaan massakeskipisteen y- ja z-koordinaatit Y_0 ja Z_0 .

Jos kappaleen massatiheys on vakio ρ (yksikkönä kg/m^3), on $\Delta m_k = \rho \Delta v_k$ ja $m = \rho v$, missä Δv_k tarkoittaa pikku kuution ja v koko kappaleen tilavuutta. Em. x-koordinaatin lausekkeessa voidaan sekä osoittajassa että nimittäjässä ottaa tällöin ρ tekijäksi ja supistaa pois. Tuloksena saadaan yksinomaan kappaleen geometrisista ominaisuuksista (koko, muoto) riippuva lauseke

$$\frac{1}{v} \sum_{k=1}^n x_k \Delta v_k,$$

joka myös antaa määrätyn integraalin jakoa tihennettäessä. Tulosta kutsutaan kappaleen geometrisen keskipisteen eli *keskiön* x-koordinaatiksi. Se on laskettavissa mahdollisista massajakaumista riippumatta.

■ keskiarvo
(painotettu)

■
koordinaatisto
(xyz-)

■ Riemannin
summa
■ määrätty
integraali

■ suljettu väli

Massakeskipiste

ESITIEDOT: ■ keskiarvo, ■ määrätty integraali

KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikka, ■ hitausmomentti

2/2

■ Sisältö

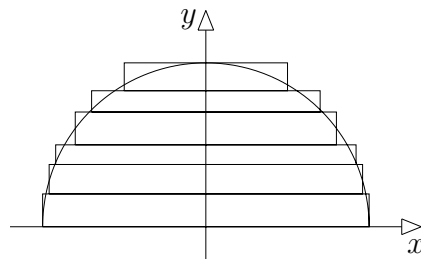
■ Hakemisto

Esimerkki massakeskipisteen laskemisesta

Olkoon tarkasteltavana puolimyrän muotoinen homogeeninen levy, ts. levy jonka massatiheys on vakio. Geometrinen keskiö ja massakeskipiste ovat tällöin sama asia. Lasketaan tämän koordinaatit.

Sijoitetaan koordinaatisto siten, että origo yhtyy puolimyrän keskipisteeseen ja levy sijaitsee x-akselin yläpuolella. Tällöin levyn reunoina ovat x-akseli ja myrän $x^2 + y^2 = R^2$ kaari, missä $y \geq 0$.

Symmetriasystistä keskiön x-koordinaatti on $= 0$.



■ ympyrä

■
koordinaatisto
(xy-)

Keskiön y-koordinaatin laskemiseksi levy jaetaan periaatteessa pikku neliöihin vastaten edellä käsiteltyjä pikku kuutioita, koska kyseessä on kaksiulotteinen kappale. Näistä voidaan kuitenkin yhdistää ne, joita vastaa sama y-arvo, jolloin levy tulee jaetuksi x-akselin suuntaisiin pitkiin ja kapeisiin suorakulmioihin, joiden sivut ovat Δy_k ja $2\sqrt{R^2 - y^2}$.

y-koordinaattien keskiarvoa approksimoidaan nyt painotettuna keskiarvona, jossa painoina ovat tällaisten suorakulmioiden alat:

■ keskiarvo
(painotettu)

$$\frac{\sum_{k=1}^n y_k \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2} \Delta y_k}{\sum_{k=1}^n 2\sqrt{R^2 - y^2} \Delta y_k}.$$

Jaon tihentäminen, so. suorakulmioiden kaventaminen ja lukumäärän lisääminen johtaa sekä osoittajassa että nimittäjässä määrättyyn integraaliin. Nimittäjän integraali esittää puolimyrän alaa ja on siis $= \frac{1}{2}\pi R^2$. Keskiön y-koordinaatiksi saadaan

■ määrätty
integraali

■ integrointi
(kaavat)

■ integrointi
(kaavat)

■ integrointi
(sijoitus)

■ integrointi
(osittais-)

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi R^2} \int_0^R 2y \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R -\frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2} \\ &= \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R. \end{aligned}$$