

Juuriyhtälöt

ESITIEDOT: ■ yhtälöt, ■ juuret

KATSO MYÖS: ■ polynomiyhtälöt

1/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

Juuriyhtälön ratkaiseminen

Juuriyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, joka sisältää juurilausekkeita, useimmiten neliöjuuria. Luonnollista on rajoittaa tarkastelu reaalialueelle, ts. yhtälöiden kertoimet ovat reaalisia ja etsitään vain reaalisia ratkaisuja.

Juuriyhtälön ratkaisemisessa pyrkimyksenä on yleensä korottaa yhtälön molemmat puolet potenssiin siten, että juuret katoavat. Välttämättä tämä ei onnistu yhdessä vaiheessa, vaan ensimmäisen korotuksen ja tuloksen sieventämisen jälkeen voidaan tarvita uusia.

Yhtälön puolittainen potenssiin korottaminen johtaa usein uuteen yhtälöön, jolla on muitakin juuria kuin alkuperäisellä. Tämän johdosta on välttämätöntä lopuksi tarkistaa, toteuttavatko saadut tuntemattoman arvot todella myös alkuperäisen yhtälön.

■ yhtälö

■ neliöjuuri

■ potenssi
(kokonaisluku-)

■
sieventäminen
(yhtälön)

Esimerkki juuriyhtälön ratkaisusta

Esimerkkinä olkoon yhtälön

$$\sqrt{x} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$$

reaalisten juurten ratkaiseminen. Puolittainen neliöön korotus antaa

$$x = x + 1 + x + 2 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)}.$$

Sieventämällä siten, että jäljellä oleva neliöjuuri jää yksinään toiselle puolelle, saadaan

$$-x - 3 = 2\sqrt{(x+1)(x+2)}.$$

Uuden neliöön korotuksen jälkeen ei juurta enää esiinny:

$$x^2 + 9 + 6x = 4(x+1)(x+2)$$

ja on päädytty toisen asteen yhtälöön

$$3x^2 + 6x - 1 = 0,$$

jonka juuret ovat $x = -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Likiarvot ovat $x_1 \approx 0.15470$ ja $x_2 \approx -2.15470$.

Näistä jälkimmäinen ei kelpaa, koska ratkaisun tulee olla ≥ 0 ; alkuperäisen yhtälön vasen puoli ei ole muuten reaalinen. Edellinen antaa yhtälön termeille likiarvot

$$\sqrt{x} \approx 0.39332, \quad \sqrt{x+1} \approx 1.07457, \quad \sqrt{x+2} \approx 1.46789,$$

joten on ilmeistä, että myöskään x_1 ei ole alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Yhtälöllä ei ole siten ratkaisuja lainkaan, mikä olisi ollut melko helposti nähtävissä jo alkuperäisestä yhtälöstäkin: Koska $x < x+1$, on myös $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ ja sitäkin suuremmalla syyllä $\sqrt{x} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$. Sama tulos olisi ollut helposti nähtävissä piirtämällä yhtälön kummankin puolen kuvaajat.

Saaduille likiarvoille pätee $0.39332 = -1.07457 + 1.46789$, jolloin x_1 on yhtälön $\sqrt{x} = -\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ ratkaisu. Tämä on luonnollistakin, koska tästä yhtälöstä päädytään neliöön korotusten jälkeen juuri samaan toisen asteen yhtälöön kuin edellä.

■ sieventäminen (yhtälön)

■ neliöjuuri

■ yhtälö (toisen asteen)

■ kuvaaja