

ESITIEDOT: ■ vektori, ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora

KATSO MYÖS: ■ geometria, ■ vektorialgebra, ■ geometriset probleemat

---

**Taso geometrisena peruskäsitteenä**

Kolmiulotteisen alkeisgeometrian peruskäsitteisiin kuuluu *taso* pisteen ja suoran lisäksi. Intuitiivisesti sitä voidaan ajatella joka suunnassa äärettömyyteen ulottuvana 'tasaisena' ja 'suorana' levynä. Tason voidaan katsoa myös syntyvän, kun suora liukuu pitkin kahta kiinteää yhdensuuntaista suoraa.

■ piste

■ suora

Tason perusominaisuudet ovat samantyyppisiä kuin suoran:

- Kolme pistettä määräävät yksikäsitteisesti tason, jos ne eivät ole samalla suoralla.
- Kaksi toisensa leikkaavaa suoraa tai kaksi yhdensuuntaista suoraa määräävät yksikäsitteisesti tason.
- Tason ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan asettaa täsmälleen yhden suuntainen taso.
- Kaksi tasoa joko leikkaavat toisensa pitkin suoraa, ovat yhdensuuntaiset tai yhtyvät.

## Taso

ESITIEDOT: ■ vektori, ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora

KATSO MYÖS: ■ geometria, ■ vektorialgebra, ■ geometriset probleemat

2/5

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Tason vektoriesitys

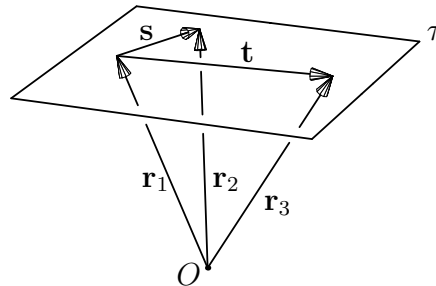
Tasolle voidaan muodostaa vektoriesitys samaan tapaan kuin suoralle:

Olkoon annettuna kolme avaruuden pistettä paikkavektoreidensa avulla:  $P_1 \hat{=} \mathbf{r}_1$ ,  $P_2 \hat{=} \mathbf{r}_2$ ,  $P_3 \hat{=} \mathbf{r}_3$ . Oletetaan, että nämä eivät ole samalla suoralla, jolloin ne määräävät yksikäsitteisesti tason  $\tau$ .

■ vektori

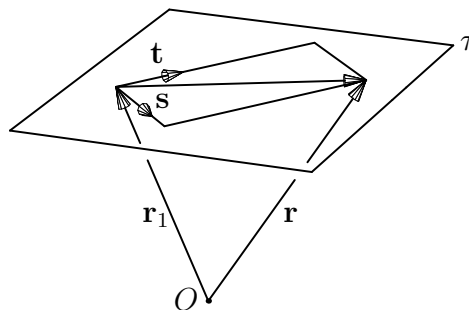
■ paikkavektori

Erotusvektorit  $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  ja  $\mathbf{t} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$  ovat tason  $\tau$  suuntaisia. Ne ovat keskenään eri suuntaisia, koska pisteet  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  eivät ole samalla suoralla. Jos vektorit asetetaan alkamaan pisteestä  $P_1$ , ne määräävät suorat, jotka puolestaan määräävät tason  $\tau$ . Tämän johdosta vektoreita kutsutaan tason  $\tau$  *virittäjävektoreiksi*.



Jos  $P \hat{=} \mathbf{r}$  on mikä tahansa tason  $\tau$  piste, sen paikkavektori voidaan kirjoittaa muotoon  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + a\mathbf{s} + b\mathbf{t}$ , kun skalaarit  $a$  ja  $b$  valitaan sopivasti. Toisaalta jos  $a$  ja  $b$  ovat mitä tahansa reaalityyppisiä lukuja, antaa eo. lauseke aina jonkin tasossa  $\tau$  olevan pisteen paikkavektorin.

■ skalaari



Esitystä  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + a\mathbf{s} + b\mathbf{t}$ , missä  $a, b \in \mathbb{R}$ , kutsutaan tason  $\tau$  *vektoriesitykseksi*. Tässä on kaksi *parametria*,  $a$  ja  $b$ , joiden arvoja vaihtelemalla saadaan kaikki tason pisteet. Samoin kuin suoran tapauksessa tason vektoriesitys ei ole yksikäsitteinen. Tason vektoriesitys muodostaa vektorialgebrallisen työkalun geometristen ongelmien käsittelyyn.

■ geometria  
(vektori-)

## Taso

ESITIEDOT: ■ vektori, ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora

KATSO MYÖS: ■ geometria, ■ vektorialgebra, ■ geometriset probleemat

3/5

■ Sisältö

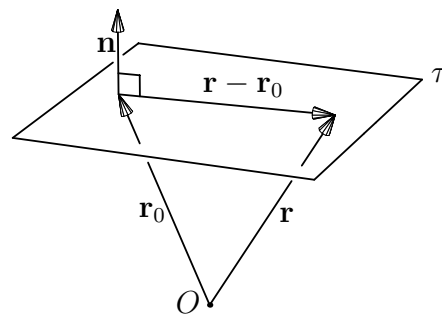
■ Hakemisto

### Tason yhtälö

xy-tasossa muotoa  $ax + by + c = 0$  oleva yhtälö esittää suoraa. Tämän analogia kolmiulotteisessa xyz-avaruudessa on yhtälö  $ax + by + cz + d = 0$ ; se esittää tasoa. Perustelut ovat hyvin samankaltaiset kuin suoran tapauksessa:

Olkoon annettuna piste  $P_0 \hat{=}\mathbf{r}_0$ , jonka kautta taso  $\tau$  kulkee ja tasoa vastaan kohtisuora vektori, sen *normaalivektori*  $\mathbf{n}$ . Nämä määräävät tason yksikäsitteisesti.

Jotta piste  $P \hat{=}\mathbf{r}$  olisi tasossa, on vektoreiden  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  oltava toisiaan vastaan kohtisuorat:  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ .



Kun merkitään  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ , saa ehto muodon

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

eli

$$ax + by + cz + d = 0,$$

missä on merkitty  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ . Tämä on *tason yhtälö* xyz-koordinaatistossa. Koordinaattien  $x$ ,  $y$  ja  $z$  kertoimina ovat normaalivektorin komponentit.

Piste  $(x, y, z)$  on siis tasossa  $\tau$ , jos ja vain jos ehto  $ax + by + cz + d = 0$  toteutuu.

■  
koordinaatisto  
(xy-)

■  
koordinaatisto  
(xyz-)

■ vektori

■ skalaaritulo

■ komponentti

## Taso

ESITIEDOT: ■ vektori, ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora

KATSO MYÖS: ■ geometria, ■ vektorialgebra, ■ geometriset probleemat

4/5

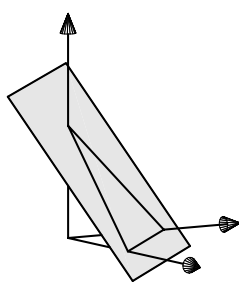
■ Sisältö

■ Hakemisto

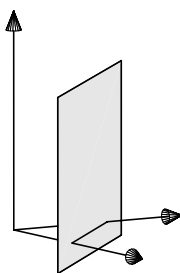
### Koordinaattiakselien ja -tasojen suuntaiset tasot

Tason yhtälön kertoimista  $a$ ,  $b$  ja  $c$  voi myös yksi tai kaksi olla  $= 0$ . Kaikki sen sijaan eivät voi olla nolliä, koska tällöin normaalivektori  $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  olisi nollavektori eikä määräisi tason suuntaa. Täten esimerkiksi yhtälöt  $x + y + z = 1$ ,  $x + y = 1$  ja  $x = 1$  kaikki esittävät kolmiulotteisen avaruuden tasoja.

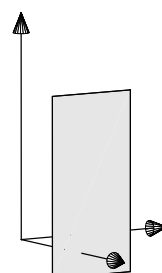
■ nollavektori



$$x + y + z = 1$$



$$x + y = 1$$



$$x = 1$$

Jos yhtälöstä puuttuu jokin koordinaatti, tason on vastaavan akselin suuntainen.

Jos kaksi koordinaattia puuttuu, taso on koordinaattitaso suuntainen.

**Suora kolmiulotteisessa avaruudessa**

Kolmiulotteisen avaruuden suoraa ei voida esittää yhdellä (skalaarisella) yhtälöllä tason esityksen tapaan. Sitä voidaan kuitenkin tarkastella kahden tason leikkaussuorana. Piste  $(x, y, z)$  on leikkaussuoralla, jos ja vain jos se toteuttaa kummankin tason yhtälön.

■ suora

Esimerkkinä tällaisesta suoran esityksestä olkoon seuraava:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Tällainen suoran esitys ei tietenkään ole yksikäsitteinen, koska tasot, joiden leikkauksena suora saadaan, voidaan valita monella eri tavalla. Esimerkin suora voidaan esittää yhtä hyvin muodossa

$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Tästä muodosta on helposti nähtävissä, että kyseessä on xy-tason ( $z = 0$ ) suora  $x + y = 1$ .

Yhtälöiden käyttö sekä tasojen että suorien esittämisessä on ns. analyyttisen geometrian menetelmä.

■ geometria  
(analyyttinen)