

Differentiaaliyhtälön käsite

Differentiaaliyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, jossa tuntemattomana on funktio ja joka sisältää tuntemattoman funktion derivaattoja.

Esimerkiksi $y'' + y = 0$ on differentiaaliyhtälö. Tuntemattomana on tällöin funktio $y = y(x)$. Yhtälön ratkaisu on

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita. Ratkaisu ei siten ole yksikäsitteinen, vaan vakioille voidaan antaa mitkä arvot tahansa. Että eo. lauseke todella on ratkaisu, nähdään derivoimalla: Koska

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x, \quad y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x,$$

on todellakin $y'' + y = 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Toisena esimerkkinä olkoon differentiaaliyhtälö $x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0$, jonka ratkaisu on

$$y = \frac{C + 4x^3}{Cx + x^4}.$$

Tässä C on jälleen vapaasti valittava vakio.

Jotta saataisiin yksikäsitteinen ratkaisu, tarvitaan differentiaaliyhtälön ohella jokin lisäehto. Edellisen esimerkin tapauksessa tällainen olisi vaikkapa $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, jolloin ainoa mahdollinen ratkaisu on $y = \sin x$, ts. $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Jälkimmäisessä esimerkissä vakioita on vain yksi, jolloin tarvitaan vain yksi lisävaatimus. Esimerkiksi $y(1) = 2$ antaisi $C = 2$.

Lisäehto, jossa annetaan funktion ja sen riittävän monen derivaatan arvot tietyllä argumentin arvolla, kutsutaan nimellä *alkuehto*.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi on melkoinen määrä erilaisia menetelmiä, joita ei tässä lähemmin tarkastella. Läheskään aina ei yhtälön ratkaiseminen tavallisten alkeisfunktioiden avulla ole edes mahdollista.

Differentiaaliyhtälöiden merkitys perustuu siihen, että niiden avulla voidaan kuvata erilaisia luonnon ja tekniikan ilmiöitä. Ratkaisemalla yhtälö saadaan tietoa ilmiön käyttäytymisestä.

■ yhtälö

■ funktio

■ derivaatta

■ derivaatta
(toinen)

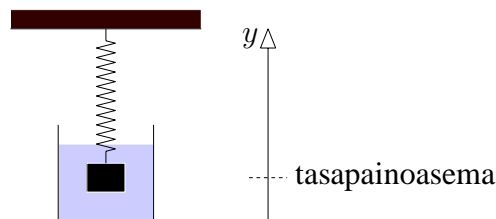
■ derivointi (al-
keisfunktioiden)

■ alkeisfunktio

Esimerkki 1 differentiaaliyhtälöistä

Tarkastellaan kappaletta, joka riippuu kiinteästä tuesta kierrejousen varassa ja joka voidaan saattaa pystysuoraan liikkeeseen. Poikkeama tasapainoasemasta olkoon ajan funktio $y(t)$. Se olkoon positiivinen tasapainoaseman yläpuolella, negatiivinen alapuolella.

■ funktio



Jos kappaletta nostetaan ylöspäin, puristuu kierrejousi kokoon ja työntää kappaletta alaspäin. Jos sitä vedetään alaspäin, venyy kierrejousi ja vetää ylöspäin. Jousen aiheuttama voima F_1 on verrannollinen poikkeamaan tasapainoasemasta: $F_1 = -ky$, missä k on positiivinen vakio. Etumerkki aiheutuu siitä, että voiman suunta on vastakkainen poikkeamalle.

Oletetaan lisäksi, että kappaleen alapuolelle on sijoitettu nesteellä täytetty astia siten, että kappaleen liike tapahtuu nesteen sisällä. Tällöin neste vaimentaa kappaleen liikettä. Vaimentava voima F_2 on sitä suurempi, mitä nopeammin kappale liikkuu; voiman suunta on nopeudelle y' vastakkainen: $F_2 = -cy'$, missä verrannollisuuskertoimen c on positiivinen vakio.

■ nopeus

■ derivaatta

Sysäyttynä pystysuoraan liikkeeseen kappale alkaa heilahtella nesteen vaimentaessa heilahtelua. Poikkeama $y(t)$ voidaan laskea seuraavasti:

Newtonin lain mukaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on kappaleen massan ja kiihtyvyyden tulo: $F = my''$. Kappaleen pystysuora heilahtelu voidaan tällöin mallintaa differentiaaliyhtälöllä, jonka molemmat puolet esittävät kappaleeseen vaikuttavaa voimaa: $F = F_1 + F_2$ eli $my'' = -ky - cy'$.

■ Newton

■ kiihtyvyys

■ derivaatta
(toinen)

Jos kappale sysätään liikkeelle (ajanhetkellä $t = 0$) siten, että sille tasapainoasemassa annetaan alkunopeus v_0 ylöspäin, on differentiaaliyhtälö ratkaistava alkuehtona $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0$. Ratkaisuna on tällöin

■ eksponentti-funktio

■ sini

$$y(t) = \frac{2mv_0}{\sqrt{4km-c^2}} e^{-\frac{c}{2m}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right),$$

missä on oletettu, että nesteen aiheuttama vaimennus on vähäistä: $c < \sqrt{4km}$. Ratkaisun laskemista ei tässä tarkastella.

Esimerkki 2 differentiaaliyhtälöistä

Yksinkertaisessa *populaatiomallissa* voidaan ajatella, että populaation lisäys aikavälillä Δt on suoraan verrannollinen populaation sen hetkiseen kokoon ja aikavälin pituuteen. Jos populaation koko ajanhetkellä t on $p(t)$, on siis

$$\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t) = kp(t)\Delta t,$$

missä verrannollisuuskertoimen k on positiivinen vakio.

Tällöin on

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = kp(t),$$

mistä rajaprosessilla $\Delta t \rightarrow 0$ päästään populaation käyttäytymistä mallintavaan differentiaaliyhtälöön

$$p' = kp.$$

Tämän ratkaisu on

$$p(t) = Ce^{kt},$$

missä C on vapaasti valittava vakio. Kyseessä on eksponentiaalisen kasvun malli. Vakio C määrätään jälleen alkuehdon perusteella: Jos populaation koko tunnetaan esimerkiksi ajanhetkellä $t = 0$, on alkuehtona $p(0) = p_0$ ja saadaan $C = p_0$.

Esimerkki osoittaa kaikkien mallien yhteisen piirteen: mallilla on rajoituksensa. Populaatiomallissa on käsitelty hyvin yksinkertaisesti populaation kasvun perusteita. Huomioon ei ole lainkaan otettu kuolleisuutta, rajattomasta kasvusta aiheutuvaa ravinnon niukkuutta, sisäisiä kitkatekijöitä (esimerkiksi keskinäistä kilpailua), ulkoisia vihollisia, jne. Mikään malli tuskin huomioikaan kaikkia vaikuttavia tekijöitä, mutta puuttuvien tekijöiden ollessa merkitykseltään mitättömiä, malli antaa hyviä tuloksia. Jokaisella mallilla on siten *pätevyysalueensa*.

■ erotusosamäärä

■ derivaatta

■ eksponenttifunktio