

## Geometrian synty

Geometria on matematiikan osa-alue, joka perinteisesti on tutkinut taso- tai avaruuskuvioita ja niiden suhteita: pisteitä, suoria, tasoja, ympyröitä, palloja, monitahokkaita, jne.

Geometrian historia alkaa antiikin Kreikasta. Vanhimpia nimiä ovat Thales Miletolainen ja Pythagoras Samoslainen (500-luvulla eKr.), Platon (400- ja 300-lukujen vaihteessa eKr.) ja Eukleides (300-luvulla eKr.). Aleksandrian yliopistossa vaikuttaneen Eukleideen kirjoittama oppikirja *Stoikheia* (lat. *Elementa*) on ensimmäinen kokonaisesitys geometriasta. Sen merkitys on ulottunut läpi vuosisatojen: koulujen geometrian opetus on 1900-luvulle saakka pohjautunut Eukleideen järjestelmään.

Antiikin kreikkalaisista matemaatikoista ansaitsee tulla mainituksi lisäksi 200-luvulla eKr. Syrakusassa elänyt Arkhimedes, joka määritteli pinta-aloja ja tilavuuksia menetelmillä, joita voidaan pitää integraalilaskennan varhaisideoina.

Eukleideen *Stoikheian* lähtökohtana olivat aksioomat, lausumat, jotka hyväksyttiin tosiksi ilman perusteluja. Esimerkiksi lausuma 'kahden pisteen kautta voidaan piirtää yksi suora' kuului perusaksioomiin. Aksioomien pohjalta todistettiin geometrisia teoreemoja, so. väittämiä, joita ei enää voitu pitää itsestään selvinä. Geometrisille probleemoille konstruointiin myös ratkaisuja harppia ja viivoitinta käyttäen. *Stoikheia* loi deduktiivisen päättelyn, uusien tulosten todistamisen aiemmin tunnettujen pohjalta loogisen päättelyn avulla.

■ Thales

■ Pythagoras

■ Platon

■ Eukleides

■ Arkhimedes

■ aksiooma

■ logiikka

## Paralleeliaksioma; erilaisia geometrioita

Eukleideen tasogeometrian aksiomiin kuului myös *paralleeliaksioma*: suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan aina piirtää täsmälleen yksi kyseisen suoran suuntainen suora.

Paralleeliaksioma ei ollut yhtä luonnostaan hyväksyttävissä kuin muut alkeellisemmat aksioomat ja sitä yritettiin todistaa vuosisatojen kuluessa menestyksettä. Ongelma ratkesi vasta 1800-luvulla hieman odottamattomalla tavalla. Ratkaisun esittivät toisistaan riippumatta venäläinen Kazanin yliopiston professori Nikolai Ivanovitš Lobatševski ja unkarilainen matemaatikko Janos Bolyai 1820-luvun lopulla. Samoihin ajatuksiin olivat vuosisadan alkupuolella tulleet muutkin, mm. Carl Friedrich Gauss, mutta hän ei julkaissut ajatuksiaan.

■ Eukleides  
■ aksioma■ Lobatševski  
■ Bolyai  
■ Gauss

Paralleeliaksiomaa ei onnistuttu todistamaan, vaan osoittautui, että vika oli suoran käsitteessä. Intuiitiivinen mielikuva suorasta ei ollutkaan loogisessa mielessä riittävä. Riippuen siitä, mitä suoralla tarkoitetaan, paralleeliaksioma joko on voimassa tai ei ole. Tämä johti *epäeuklidisten geometrioiden* syntymiseen. Jos paralleeliaksioma on voimassa, puhutaan *euklidisesta* geometriasta; jos se ei ole, kyseessä on *epäeuklidinen* geometria.

Seurauksena oli geometrian aksiomajärjestelmien tarkempi tutkiminen, mikä mm. johti vuonna 1899 ilmestyneeseen Göttingenin yliopiston professorin David Hilbertin teokseen *Grundlagen der Geometrie*, jossa esitettiin moderni geometrian aksiomatiikka. Pohjana on tällöin kaksi joukkoa, joista toisen alkioita kutsutaan pisteiksi ja toisen suoriksi. Näillä oletetaan olevan aksiomissa luetellut ominaisuudet.

■ Hilbert  
■ joukko

Geometrian tutkimisessa on käytetty hyväksi myös algebraa. Tämä yleistyi varsinkin René Descartesin töiden jälkeen 1600-luvulta lähtien.

Algebran käyttö on vapauttanut geometrikot tarkastelemasta vain kaksiulotteista taso- tai kolmiulotteista avaruusgeometriaa. Dimensio voi olla aivan hyvin suurempikin, jopa ääretön.

■ geometria (synteettinen)  
■ geometria (analyttinen)  
■ geometria (vektori-)  
■ geometria (deskriptiivinen)  
■ geometria  
■ algebra  
■ Descartes  
■ dimensio  
■ kombinaatio

Geometrian aksiomajärjestelmien tutkiminen ja geometrian näkeminen pisteiden ja suorien muodostamiksi joukoiksi ja näiden välisiksi relaatioiksi on johtanut myös abstrakteihin äärellisiin geometrioihin. Näissä on sekä pisteitä että suoria vain äärellinen määrä. Sovellukset löytyvät yllättäviltäkin aloilta, mm. kombinaatioteoriasta.

## Euklidinen ja epäeuklidinen geometria

Geometriaa, so. pisteiden ja suorien muodostamaa järjestelmää sanotaan *euklidiseksi geometriaksi*, jos siinä on voimassa *paralleeliaksiooma*, ts. suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi kyseisen suoran suuntainen suora. Jos näin ei ole, kyseessä on *epäeuklidinen geometria*.

Yksinkertaisin euklidisen geometrian malli, so. järjestelmä, joka toteuttaa euklidiset aksioomat, on tavallinen  $xy$ -taso. Pisteitä ovat tällöin lukuparit  $(x, y)$ , so. pisteet ilmaistaan koordinaateillaan. Suorat määritellään yhtälöillä:  $ax + by + c = 0$  (missä ainakin toinen luvuista  $a, b$  on  $\neq 0$ ) on suora, jolle kuuluvat ne pisteet, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön. On yksinkertainen algebrallinen lasku osoittaa, että *paralleeliaksiooma* on voimassa.

Esimerkki epäeuklidisesta geometriasta saadaan tarkastelemalla geometriaa pallon pinnalla. Tämän geometrian pisteet ovat pallon pinnan pisteitä. Suorat ovat pallon pinnalla olevia isoympyröitä, so. ympyröitä, joiden säde on sama kuin pallon säde ja jotka saadaan leikkaamalla pallopintaa pallon keskipisteen kautta kulkevalla tasolla. Kaksi tällaista ympyrää — pallonpintageometrian suoraa — leikkaa toisensa aina, jopa kahdessa vastakkaisilla puolilla palloa olevassa pisteessä. Minkään suoran minkään ulkopuolisen pisteen kautta ei siis voida asettaa suoraa, joka ei leikkaisi kyseistä suoraa! Tällaista epäeuklidista geometriaa kutsutaan elliptiseksi.

Epäeuklidinen geometria voi olla myös hyperbolinen, jolloin suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan asettaa äärettömän monta suoraa, jotka eivät kohtaa alkuperäistä suoraa missään pisteessä, ts. ovat sen suuntaisia.

■ koordinaatti

■ suora (yhtälö)

■ pallo

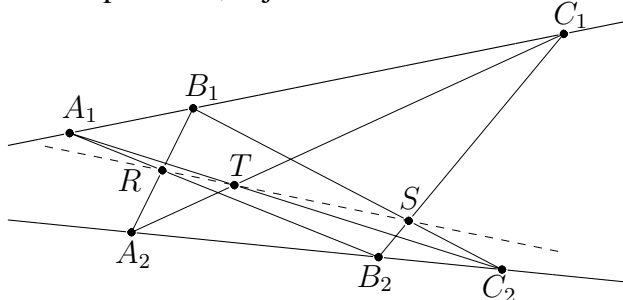
■ isoympyrä

■ geodeettinen viiva

## Projektiivinen geometria

Projektiivisessä geometriassa tutkitaan suorien ja tasojen keskinäistä leikkaamista kiinnittämättä huomiota mitallisiin ominaisuuksiin. Tämänkin geometrian alan historia on pitkä. Merkittäviä nimiä ovat Pappos Aleksandrialainen 300-luvulta, ranskalaiset Girard Desargues ja Blaise Pascal 1600-luvulta, samoin ranskalaiset Charles-Julien Brianchon ja Jean-Victor Poncelet 1800-luvun alusta.

Esimerkkinä projektiivisen geometrian lauseista olkoon seuraava *Pappoksen lause*: Olkoon annettuna kaksi suoraa tasossa; toiselta valitaan pisteet  $A_1, B_1, C_1$  ja toiselta pisteet  $A_2, B_2, C_2$ . Olkoon piste  $R$  suorien  $A_1B_2$  ja  $A_2B_1$  leikkauspiste, piste  $S$  vastaavasti suorien  $B_1C_2$  ja  $B_2C_1$  leikkauspiste ja piste  $T$  suorien  $C_1A_2$  ja  $C_2A_1$ . Tällöin pisteet  $R, S$  ja  $T$  ovat samalla suoralla.



Jotta Pappoksen lause olisi poikkeuksetta voimassa, on suorien leikkauspisteen käsitettä täydennettävä sitä tapausta varten, että suorat sattuvat olemaan yhdensuuntaisia, jolloin leikkauspistettä ei tavanomaisessa mielessä ole. Projektiivisessä geometriassa otetaan tätä varten käyttöön ns. 'äärettömän kaukaiset pisteet': kahden yhdensuuntaisen suoran sanotaan leikkaavan äärettömän kaukaisessa pisteessä, joka sijaitsee suorien suunnassa.

Projektiivista geometriaa voidaan myös käsitellä algebran keinoin (eräänlaisena analyyttisenä geometriana).

■ Pappos

■ Desargues

■ Pascal

■ Poncelet

■ geometria  
(analyttinen)