

## Hitausmomentti

ESITIEDOT: ■ määrätty integraali

KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikkaa, ■ massakeskipiste

1/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Hitausmomentin määrittely

*Massapisteen* — massana  $m$  — *fysikaalinen hitausmomentti* kiertoakselin suhteen on  $J = mr^2$ , missä  $r$  on kohtisuora etäisyys akselistä.

Jos kyseessä on kappale, saadaan sen hitausmomentti lasketuksi käyttämällä samaa ideaa kuin massakeskipisteen laskemisessa:

■ massakeskipiste

Kappale jaetaan pieniin osiin, esimerkiksi pikku kuutioihin koordinaattitasojen suuntaisilla tasoilla. Muunkinlaista jakoa 'pistemäisiin' osiin voidaan käyttää. Jokaista osaa kohdellaan omana massapisteenään ja lasketaan näiden hitausmomentit yhteen:

$$\sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta m_k,$$

missä  $\Delta m_k$  on  $k$ :nnen pikku kuution massa ja  $r_k$  sen etäisyys kiertoakselista.

Tämä on Riemannin summa, joka kuutioita pienennettäessä lähestyy määrättyä integraalia. Yleensä kyseessä on kolmiulotteisen avaruuden integraali, mutta eri-koistapauksissa se on palautettavissa yhden muuttujan integraaliksi, kuten edempänä esimerkissä osoitetaan. Integraalia kutsutaan *kappaleen (fysikaaliseksi) hitausmomentiksi*.

■ Riemannin summa

■ määrätty integraali

Jos kappale on homogeeninen, ts. sen massatiheys  $\rho$  on vakio, on  $\Delta m_k = \rho \Delta v_k$ , missä  $\Delta v_k$  on pikku kuution tilavuus. Tällöin  $\rho$  voidaan ottaa eo. summassa tekijäksi. Jäljelle jäävä summa

$$\sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta v_k$$

riippuu vain kappaleen geometriasta ja valitusta akselisuorasta. Vastaava integraali on *kappaleen matemaattinen hitausmomentti* eli *toinen momentti* akselisuoran suhteen. Matemaattinen hitausmomentti saadaan siis fysikaalisesta asetamalla massatiheydeksi vakio  $\rho = 1$ .

## Hitausmomentti

ESITIEDOT: ■ määrätty integraali

KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikkaa, ■ massakeskipiste

2/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkki hitausmomentin laskemisesta

Lasketaan  $R$ -säteisen pallon hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen, kun massatiheys on vakio  $\rho = 1$ .

Sijaitkoon kolmiulotteinen xyz-koordinaatisto siten, että origo on pallon keskipisteessä. Kiertoakseli olkoon  $z$ -akseli. Pallo jaetaan edellä kuvatulla tavalla pikku osiin ja näistä kerätään yhteen ne, joilla on sama etäisyys kiertoakselista. Yhteen kuuluvat osat muodostavat lieriökuoria akselina  $z$ -akseli. Jos etäisyys akselista on  $r$ , on lieriön korkeus Pythagoraan mukaan  $2\sqrt{R^2 - r^2}$  ja pohjan säde luonnollisesti  $r$ . Jos lieriökuoren paksuus on  $\Delta r$ , on kuoren tilavuus (eli massa, koska  $\rho = 1$ ) likimain  $2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} \Delta r$ .

Jakamalla pallo  $n$  lieriökuoreen, muodostamalla jokaisen hitausmomentti ja laskemalla yhteen saadaan Riemannin summa, joka approksimoi pallon hitausmomenttia:

$$\sum_{k=1}^n r_k^2 \cdot 2\pi r_k \cdot 2\sqrt{R^2 - r_k^2} \Delta r_k.$$

Jakoa tihennettäessä, so. kuoria ohennettaessa, jolloin niiden lukumäärä kasvaa, tämä lähestyy integraalia

$$J = 4\pi \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr,$$

mikä siis antaa pallon hitausmomentin.

Integraali voidaan laskea tekemällä sijoitus  $t = \sqrt{R^2 - r^2}$ , jolloin  $dt = -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$  ja uudet rajat ovat  $t = R$ ,  $t = 0$ . Integraali saa seuraavan muodon ja voidaan laskea:

$$J = 4\pi \int_R^0 -(R^2 - t^2)t^2 dt = -4\pi \int_R^0 \left(\frac{1}{3}R^2 t^3 - \frac{1}{5}t^5\right) = \frac{8}{15}\pi R^5.$$

Hitausmomentti lausutaan yleensä kappaleen kokonaismassan avulla. Koska massatiheys  $= 1$ , on kokonaismassa sama kuin tilavuus:  $m = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Tällöin pallon hitausmomentti voidaan kirjoittaa

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Tämä vastaa tilannetta, jossa pallon massa on keskittynyt yhteen pisteeseen etäisyydelle  $\sqrt{\frac{2}{5}} R$ . Tätä etäisyyttä sanotaan pallon *hitaussäteeksi*.

■ pallo

■  
koordinaatisto  
(xyz-)

■ lieriö

■ Pythagoraan  
lause

■ pohja (lieriön)

■ Riemannin  
summa

■ määrätty  
integraali

■ integrointi  
(sijoitus)

■ pallo  
(tilavuus)