

Käyrä

1/4

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ reaalfunktiot, ■ yhtälöt, ■ koordinaatistot, ■ piste

KATSO MYÖS: ■ suora, ■ derivaatta, ■ tangentti ja normaali, ■ pinta

■ Sisältö

■ Hakemisto

Tasokäyrä

Taso- tai avaruuskäyrän täsmällinen määrittely ei ole aivan yksinkertaista. Mikäli esiintyvät funktiot ovat riittävän säännöllisiä (esim. jatkuvia tai derivoituvia), voidaan *tasokäyriä* luonnehtia seuraavilla tavoilla:

1. Ne tason pisteet, joiden suorakulmaiset koordinaatit x ja y toteuttavat yhtälön $y = f(x)$, muodostavat käyrän. Esimerkiksi paraabeli $y = x^2$ tai itseisarvo $y = |x|$.

2. Ne tason pisteet, joiden suorakulmaiset koordinaatit toteuttavat muotoa $F(x, y) = 0$ olevan yhtälön, muodostavat usein käyrän. Esimerkkeiksi sopivat ympyrä $x^2 + y^2 - 1 = 0$, paraabeli $x^2 - y = 0$, suora $x + 2y - 3 = 0$ tai *Cartesiuksen lehti* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Muoto $y = f(x)$ on erikoistapaus tästä, koska yhtälö voidaan aina saattaa muotoon $F(x, y) = f(x) - y = 0$. Toisaalta yhtälö $F(x, y) = 0$ ei välttämättä esitä käyrää; esimerkiksi yhtälön $x^2 + y^2 = 0$ toteuttaa vain yksi piste, origo, ja yhtälöä $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ei toteuta mikään tason piste.

3. Tason pisteet, joiden napakoordinaatit r ja φ toteuttavat yhtälön $r = f(\varphi)$, muodostavat käyrän. *Arkhimedeen spiraali* $r = \varphi$ ja *logaritminen spiraali* $r = e^\varphi$ ovat esimerkkejä.

4. Käyrä voidaan määritellä muotoa $x = x(t)$, $y = y(t)$ olevan *parametriesityksen* avulla. Kun *parametri* t saa tietyt arvot, esimerkiksi arvot joltakin väliltä $[a, b]$, vastaa jokaista parametriarvoa käyrän piste $(x(t), y(t))$. Esimerkiksi ympyrä $x^2 + y^2 = 4$ voidaan esittää muodossa $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, missä $t \in [0, 2\pi]$.

Parametriesitys voidaan kirjoittaa myös vektorimuotoon: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, missä $\mathbf{r}(t)$ on parametriarvoa t vastaavan käyrän pisteen paikkavektori.

■ jatkuvuus

■ derivoituvuus

■ koordinaatisto (xy-)

■ paraabeli (xy-koordinaateissa)

■ itseisarvo (reaaliluvun)

■ ympyrä

■ suora (yhtälö)

■ napakoordinaatit (tason)

■ väli (reaaliakselin)

■ sini

■ kosini

■ paikkavektori

Käyrä

2/4

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ reaalifunktiot, ■ yhtälöt, ■ koordinaatistot, ■ piste

KATSO MYÖS: ■ suora, ■ derivaatta, ■ tangentti ja normaali, ■ pinta

■ Sisältö

■ Hakemisto

Parametriesityksen muodostaminen

Muodossa $y = f(x)$ tai $r = f(\varphi)$ annetut käyrät voidaan parametrisoida helposti: Jos parametriksi otetaan x tai φ , esitykset ovat

$$\mathbf{r}(x) = x \mathbf{i} + f(x) \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(\varphi) = f(\varphi) \cos \varphi \mathbf{i} + f(\varphi) \sin \varphi \mathbf{j}.$$

■

koordinaatisto (xy-)

■

koordinaatisto (napa-)

Jos käyrä on annettu muodossa $F(x, y) = 0$, ei parametrisointi välttämättä ole helppoa. Parametriksi on usein syytä valita muuttuja, jolla on jokin luonnollinen geometrinen merkitys.

Ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ parametriesityksessä $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ parametri t on ympyrän pistettä (x, y) vastaava keskuskulma.

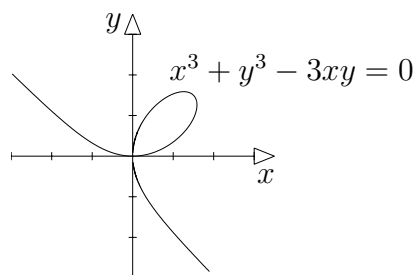
■ keskuskulma

Cartesiuksen lehti $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ voidaan parametrisoida ottamalla parametriksi origon kautta kulkevan suoran $y = tx$ kulmakerroin t , jolloin parametriesitykseksi saadaan

■ suora (yhtälö)

■ kulmakerroin

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$



Käyrä

3/4

■ Sisältö

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ reaalfunktiot, ■ yhtälöt, ■ koordinaatistot, ■ piste

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ suora, ■ derivaatta, ■ tangentti ja normaali, ■ pinta

Avaruuskäyrä

Luonnollisin tapa esittää *avaruuskäyrä* on parametriesitys:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

missä käyrän pisteen suorakulmaiset koordinaatit, ts. paikkavektorin komponentit on esitetty parametrin t funktioina: $(x(t), y(t), z(t))$.

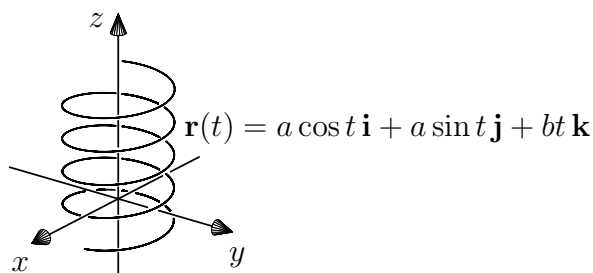
■
koordinaatisto
(xyz-)

Esimerkiksi ruuvikierteen, ns. *ruuviviivan* parametriesitys on

■ paikkavektori

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k},$$

missä a ja b ovat vakioita.



Käyrä

4/4

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ reaalfunktiot, ■ yhtälöt, ■ koordinaatistot, ■ piste

KATSO MYÖS: ■ suora, ■ derivaatta, ■ tangentti ja normaali, ■ pinta

■ Sisältö
■ Hakemisto

Käyrän tangentti

Parametriesityksen avulla annetun taso- tai avaruuskäyrän tangentin suuntavektori, *tangenttivektori*, saadaan yksinkertaisesti derivoimalla parametriesitys:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} \quad \text{tai} \quad \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

■ tangentti (suora)
■ suuntavektori (suoran)

Tulos seuraa siitä, että $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ on kahta käyrän pistettä yhdistävä vektori, so. vektori, joka antaa käyrän erään sekantin suunnan. Tämän kanssa saman-suuntainen on vektori

■ vektori
■ sekantti (suora)

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Jos $h \rightarrow 0$, lähestyvät pisteet toisiaan, jolloin sekantti kääntyy tangentiksi, ja toisaalta yo. erotusosamäärävektori lähestyy derivaattaa $\mathbf{r}'(t)$.

■ erotusosamäärä
■ derivaatta

