

Pinta

1/2

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ reaalfunktiot, ■ yhtälöt, ■ koordinaatistot, ■ piste

■ Sisältö

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ taso, ■ käyrä

Pinnan esitysmuodot

Kuten käyrän myös *pinnan* täsmällinen määrittely on vaikea tehtävä. Seuraavassa esitetään ainoastaan eri mahdollisuudet luonnehtia kolmiulotteisen avaruuden pinta paneutumatta tarkemmin esiintyviltä funktioilta vaadittaviin säännöllisyyssominaisuuksiin.

■ käyrä (taso-)

■ käyrä
(avaruus-)

1. Ne kolmiulotteisen avaruuden pisteet, joiden suorakulmaiset koordinaatit x , y ja z toteuttavat yhtälön $z = f(x, y)$, muodostavat pinnan. Tällöin siis xy -tason pistettä (x, y) vastaten lasketaan arvo z , joka ilmoittaa tämän pisteen kohdalla (xy -tason ylä- tai alapuolella) olevan pinnan pisteen korkeuden. Esimerkiksi $z = xy$ ja $z = x^2 - y^2$ ovat satulapintoja.

■
koordinaatisto
(xyz-)

■ satulapinta

2. Muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö määrittää usein pinnan. Pinnan muodostavat ne pisteet, joiden koordinaatit (x, y, z) toteuttavat yhtälön. Esimerkiksi $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ on origokeskinen pallopinta, $x + y + z - 1 = 0$ on taso.

■ pallo

■ taso (yhtälö)

Muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö ei välttämättä toteudu ainoallakaan arvokolmikolla (x, y, z) . Tällöin se ei geometrisesti esitä mitään. Esimerkiksi sopii $x^2 + e^y + \cosh z = 0$. Yhtälö voi esittää myös pistettä: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 0$ on piste $(1, 2, 3)$. Myös suora on mahdollinen: Yhtälö $(x + y + z + 1)^2 + (x + 2y + 3z + 4)^2 = 0$ toteutuu vain, jos $x + y + z + 1 = 0$ ja $x + 2y + 3z + 4 = 0$, ts. kyseessä on näiden yhtälöiden määrittämien tasojen leikkaussuora.

■ eksponentti-
funktio

■
hyperbelikosini

■ suora (kolmiulotteinen)

3. Kolmiulotteisen avaruuden pintojen käsittely on yleensä helpointa *parametriesityksen* avulla. Tällöin tarvitaan kaksi parametria:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k},$$

missä parametrit u ja v saavat arvot jostakin uv -tason alueesta. Jokaista parametriparia (u, v) vastaa siten paikkavektori $\mathbf{r}(u, v)$, ts. pinnan piste $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Esimerkkejä edempänä.

■ paikkavektori

Pinta

2/2

■ Sisältö

ESITIEDOT: ■ funktiokäsite, ■ reaalfunktiot, ■ yhtälöt, ■ koordinaatistot, ■ piste

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ taso, ■ käyrä

Esimerkkejä pintojen parametriesityksistä

Origokeskisen R -säteisen pallon parametriesitys on

■ pallo

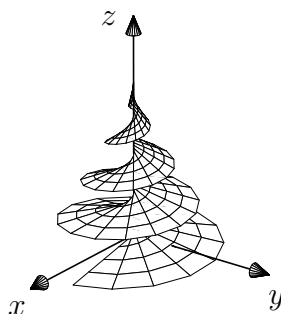
$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + R \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + R \sin \vartheta \mathbf{k},$$
$$\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2], \varphi \in [-\pi, \pi],$$

kuten pallokoordinaattien määritelmän perusteella voidaan päätellä.

■
koordinaatisto
(pallo-)

Toisena esimerkkinä olkoon eräs *ruuvipinta*:

$$\mathbf{r}(u, v) = u\left(1 - \frac{v}{8\pi}\right)(\cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j}) + \frac{1}{5}(v - u) \mathbf{k}, \quad u \in [0, 3], v \in [0, 8\pi].$$



Parametriesityksen käyttö mahdollistaa pintojen tangenttitasojen ja muiden geometristen ominaisuuksien tutkimisen derivaattojen avulla. Tällöin kuitenkin tarvitaan ns. usean muuttujan differentiaalilaskentaa.

■ tangenttitaso