

Kymmenjärjestelmä

Tavallisessa lukujärjestelmässä, jonka *kantaluku* on 10 — *kymmenjärjestelmässä* — käytetään kymmentä numeroa: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Luvut esitetään näiden avulla ns. *positiojärjestelmän* mukaisesti: Peräkkäin kirjoitetuista numeroista oikeanpuoleisin tarkoittaa luvussa olevien ykkösten lukumäärää, tämän vasemmalla puolella oleva täysien kymmenten lukumäärää, seuraava täysien satojen määrää, jne. Kyseessä ovat kantaluvun potenssien 10^0 , 10^1 , 10^2 , jne. lukumäärät.

■ potenssi
(kokonaisluku-)

Jos kyseessä ei ole kokonaisluku, kirjoitetaan ykkösiä esittävän luvun oikealle puolelle desimaalipiste (tai -pilkku) ja tämän perään kymmenesosien lukumäärä, sitten sadasosien lukumäärä, jne. Kyseessä ovat kantaluvun negatiivisten potenssien 10^{-1} , 10^{-2} , jne. lukumäärät.

Lukujen kymmenjärjestelmäesitykset on siis tulkittava seuraavien esimerkkien osoittamalla tavalla:

$$\begin{aligned} 1648 &= 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8, \\ 3.14 &= 3 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Yleisesti voidaan kirjoittaa summamerkintää käyttäen

■ summamer-
kintä

$$a_n \dots a_2 a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-m} = \sum_{k=-m}^n a_k \cdot 10^k.$$

Tässä vasemmalla puolella olevat symbolit a_i ovat luvun numeroita peräkkäin lueteltuina eikä kerrottuina keskenään; desimaalipiste sijaitsee numeroiden a_0 ja a_{-1} välissä.

Muut lukujärjestelmät

Lukujärjestelmän kantaluku voi olla muukin luonnollinen luku (> 1) kuin 10. Jos kantaluku on b , ovat järjestelmän numerot $0, 1, \dots, b - 1$. Esitettäessä jotakin lukua b -kantisessa järjestelmässä, kirjoitetaan näitä numeroita peräkkäin samaan tapaan kuin kymmenjärjestelmässä kirjoitetaan numeroita $0, 1, \dots, 9$. Myös desimaalipistettä voidaan käyttää, vaikka nimitys 'desimaali' ei enää olekaan paikallaan.

■ luonnollinen luku

Yleisesti varsinkin tietotekniikassa käytettyjä lukujärjestelmiä ovat *binääri-*, *oktaali-* ja *heksadesimaalijärjestelmä*; näiden kantaluvut ovat 2, 8 ja 16. Binäärijärjestelmän numerot ovat 0 ja 1; oktaalijärjestelmän 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Heksadesimaalijärjestelmässä numeroita tarvitaan kuusitoista, jolloin avuksi otetaan aakkosten alkupään kirjaimet: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Mitä lukua tietty esitys tarkoittaa, lasketaan samalla tavoin kuin edellä kymmenjärjestelmän tapauksessa: Jos luvut a_i tarkoittavat järjestelmän numeroita, tulkitaan seuraavasti:

■ summamerkintä

■ potenssi (kokonaisluku-)

$$a_n \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-m} = \sum_{k=-m}^n a_k \cdot b^k.$$

Kun yhtäläisyysmerkin oikea puoli lasketaan (kymmenjärjestelmässä), saadaan luvun esitys kymmenjärjestelmässä.

On siis ajateltava, että 'luku' sinänsä on jotakin esitysjärjestelmästä riippumattonta. Se voidaan valinnan mukaan esittää eri järjestelmissä, joista kymmenjärjestelmä on ihmiselle tutuin. Tietokonetekniikalle luonnollisin on binäärijärjestelmä — tai sen johdannaisina oktaali- tai heksadesimaalijärjestelmä — koska sähköisillä ja magneettisilla ilmiöillä on kaksi tilaa vastaten binäärijärjestelmän kahta numeroa.

Esimerkkejä lukujärjestelmistä

Heksadesimaalijärjestelmän luku 2B3 voidaan muuntaa kymmenjärjestelmään seuraavasti:

$$2 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 3 = 691.$$

Tässä on numero B korvattu sen kymmenjärjestelmän mukaisella arvolla 11 ja kantaluvuksi kirjoitettu 16.

Jos kantalukuna on 3, tarkoittaa esitys 121.2 kymmenjärjestelmän lukua

$$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 + 2 \cdot 3^{-1} = 16.666 \dots$$

Kyseessä on siis päättymätön kymmenjärjestelmän desimaaliluku, vaikka vastaava esitys kolmekantaisessa järjestelmässä onkin päättävä.

Käänteinen tehtävä, kymmenjärjestelmän luvun esittäminen jossakin toisessa järjestelmässä, voidaan ratkaista sovittamalla lukuun kantaluvun potensseja suurimmasta alkaen. Olkoon esimerkkinä oktaaliesityksen hakeminen kymmenjärjestelmän luvulle 8765:

Kantaluvun 8 peräkkäiset potenssit ovat 1, 8, 64, 512, 4096, 32768 jne. Näistä viimeiseksi mainittu on suurempi kuin tutkittava luku, mutta edellinen, 4096, sopii lukuun kaksi kertaa. Oktaaliesityksen ensimmäinen numero on siten 2 ja luvusta on tämän jälkeen esittämättä $8765 - 2 \cdot 4096 = 573$. Edellinen kantaluvin potenssi, 512, sopii tähän kerran. Oktaaliesityksen toinen numero on siis 1 ja esittämättä on $573 - 512 = 61$. Tähän ei edellinen kantaluvin potenssi, 64, sovi lainkaan ja oktaaliesitykseen tulee numeroksi 0. Sitä edellinen kantaluvin potenssi, 8, sopii seitsemän kertaa; siis numero 7 ja esittämättä on $61 - 7 \cdot 8 = 5$. Tähän sopii edellinen kantaluvin potenssi, 1, tasan viisi kertaa; siis numero 5. Oktaaliesitys on siten 21075.

Laskun voi myös järjestää kaavioksi:

$$\begin{array}{rcl} 8765 - \underline{2} \cdot 8^4 & = & 573 \\ 573 - \underline{1} \cdot 8^3 & = & 61 \\ 61 - \underline{0} \cdot 8^2 & = & 61 \\ 61 - \underline{7} \cdot 8^1 & = & 5 \\ 5 - \underline{5} \cdot 8^0 & = & 0 \end{array}$$

■
desimaaliesitys

■ potenssi
(kokonaisluku-)