

Polynomiyhtälöt

1/3

ESITIEDOT: ■ yhtälöt, ■ polynomit, ■ juuret

■ Sisältö

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ Newtonin iteraatio, ■ polynomien tekijöihin jako, ■ kompleksiluvut

Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt

Polynomiyhtälöt jaotellaan polynomin asteluvun mukaan.

■ yhtälö

Ensimmäisen asteen polynomiyhtälö, lyhyemmin *ensimmäisen asteen yhtälö* on muotoa $ax + b = 0$, missä $a \neq 0$. Ratkaisuja on yksi: $x = -b/a$.

■ polynomi

■ asteluku

Toisen asteen yhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$. Yhtälö ratkaistaan yleensä ulkoa opituilla ratkaisukaavoilla:

■ neliöjuuri

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos yhtälö jaetaan kertoimella a , se saa periaatteessa muodon $x^2 + px + q = 0$. Ratkaisukaavat esitetään usein myös tätä tapausta varten:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Vastaten ratkaisukaavojen \pm -merkkiä, juuria on yleensä kaksi. Näiden luonteen ratkaisee *diskriminantti*, so. neliöjuurimerkin alla oleva lauseke $D = b^2 - 4ac$.

Jos yhtälö on reaalikertoiminen, saadaan seuraavat tapaukset: Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalista juurta. Jos $D = 0$, sanotaan juurien yhtyvän, ts. on vain yksi reaalijuuri $x = -b/(2a)$. Jos $D < 0$, juurina on kompleksinen liittolukupari.

■ kompleksiluku

Toisen asteen yhtälö voi olla myös kompleksikertoiminen, so. kertoimet a , b ja c tai jotkut niistä voivat olla kompleksilukuja. Samat ratkaisukaavat ovat tällöinkin käytettävissä, mutta neliöjuurimerkin alle saadaan yleensä kompleksiluku ja juuren laskeminen edellyttää laajempaa perehtyneisyyttä kompleksilukuihin.

■ liittoluku

Polynomiyhtälöt

2/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ yhtälöt, ■ polynomit, ■ juuret

KATSO MYÖS: ■ Newtonin iteraatio, ■ polynomien tekijöihin jako, ■ kompleksiluvut

Korkeampien asteiden yhtälöt

Toista astetta korkeampien asteiden yhtälöiden ratkaiseminen on oleellisesti vaikeampaa. *Kolmannen ja neljännen asteen yhtälölle* on olemassa ratkaisukaavat ns. *Cardanon kaavat* (italialaisen Geronimo Cardanon julkaisemat vuonna 1545, mutta eivät hänen itsensä keksimät; kolmannen asteen kaavan on jo aiemmin tuntenut ainakin Niccolo Tartaglia, neljännen asteen on löytänyt Ludovico Ferrari). Nämä ovat kuitenkin siinä määrin mutkikkaat, että niitä harvoin todella käytetään.

■ asteluku

■ Cardano

■ Tartaglia

Viidennen ja sitä korkeampien asteiden yhtälöille ei yleisiä ratkaisukaavoja juurilausekkeiden avulla esitettyinä ole. Tuloksen ovat toisistaan riippumatta todistaneet norjalainen matemaatikko Niels Henrik Abel (1824) ja italialainen fyysikko Paolo Ruffini (1813).

■ Abel

Korkea-asteiset polynomiyhtälöt ratkaistaankin useimmiten numeerisesti *Newtonin iteraatiolla* tai jollakin sen muunnelmalla, jolloin täytyy tuntea approksimaatio juurelle ja laskennan tuloksena saadaan vain tämä juuri. Muunkintyyppisiä numeerisia menetelmiä on olemassa. Newtonin iteraatio saattaa jo kolmannen asteen tapauksessa olla Cardanon kaavoja tehokkaampi.

■ Newtonin iteraatio

Polynomiyhtälöt

3/3

ESITIEDOT: ■ yhtälöt, ■ polynomit, ■ juuret

■ Sisältö

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ Newtonin iteraatio, ■ polynomien tekijöihin jako, ■ kompleksiluvut

Algebran peruslause

Algebran peruslauseen mukaan jokaisella reaali- tai kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä (jonka asteluku on ≥ 1) on ainakin yksi (reaalinen tai kompleksinen) juuri. Tuloksen todisti matemaatikkojen kuninkaaksi kutsuttu saksalainen Carl Friedrich Gauss väitöskirjassaan 1799.

■ asteluku

■ Gauss

Lauseen seurauksena saadaan suhteellisen helposti astetta n olevalle polynomille $p(x)$ esitys

■ polynomi

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

missä a_n on polynomin korkeimman asteen termin kerroin. Reaali- tai kompleksiluvut x_1, x_2, \dots, x_n ovat ilmeisestikin polynomin nollakohdat, ts. polynomiyhtälön $p(x) = 0$ juuret. Näiden ei kuitenkaan tarvitse olla eri suuria. Eo. tekijöihinjaon mielessä astetta n olevalle polynomilla on siis aina n juurta, mutta jotkut näistä voivat olla yhtä suuria.

■ kompleksiluku

Jos polynomi on reaalikertoiminen ja paritonta astetta, ainakin yksi juurista on reaalinen. Reaalikertoimisella polynomilla kompleksijuuria on parillinen määrä; nämä muodostavat kompleksiset liittolukuparit. Vrt. polynomin tekijöihin jakoon.

■ liittoluku

■ tekijöihin jako (luvun)

Polynomin tekijäesitys antaa mahdollisuuden polynomiyhtälön redusointiin alhaisempaan astelukuun, jos yksi juuri pystytään jotenkin löytämään:

■ tekijöihin jako (polynomin)

Jos x_1 on astetta n olevan polynomiyhtälön $p(x) = 0$ juuri, voidaan suorittaa jakolasku $p(x)/(x - x_1)$, joka menee tasan. Osamäärä on polynomi, jonka asteluku on $n - 1$ ja jolla on samat nollakohdat kuin alkuperäisellä polynomilla $p(x)$ lukuunottamatta jo löydettyä nollakohtaa x_1 . Yhden juuren löytäminen yksinkertaistaa siis muiden etsimistä.

■ tekijöihin jako (polynomin)

■ tekijöihin jako (polynomin)

■ jakolasku (polynomien)

Esimerkiksi polynomiyhtälöstä $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ nähdään melko helposti, että yhtenä juurena on $x_1 = 1$. Jaettaessa polynomi tekijällä $x - 1$ menee jako tasan, jolloin voidaan kirjoittaa

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) = 0.$$

Polynomiyhtälön muiden juurten etsimistä voidaan siis jatkaa tarkastelemalla yhtälöä $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Menettely edellyttää yhden juuren arvaamista. Tällöin on usein apua tiedosta, että jos polynomin korkeimman asteen termin kerroin on $= 1$, niin vakiotermi on juurten tulo tai sen vastaluku.

■ polynomi (nollakohdat ja kertoimet)