

## Integraalifunktio

1/4

ESITIEDOT: ■ derivaatta, ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

KATSO MYÖS: ■ määrätty integraali, ■ integroimistekniikkaa

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Integraalifunktion käsite

Reaalifunktion  $f$  *integraalifunktioksi* sanotaan jokaista funktiota, jonka derivaatta on  $f$ .

■ funktio  
(reaali-)

■ derivaatta

Integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen. Jos  $F(x)$  on funktio, jonka derivaatta on  $f(x)$ , myös jokaisen funktion  $F(x) + C$ , missä  $C$  on vakio, derivaatta on  $f(x)$ . Saman funktion integraalifunktiot voivat siis erota toisistaan vakiolla. Toisaalta voidaan todistaa, että muunlaisia eroja ei voi olla.

Funktion  $f$  kaikkia integraalifunktioita merkitään

$$\int f(x) dx.$$

Helposti derivoimalla tarkistettavia esimerkkejä ovat seuraavat:

■ derivointi (alkeisfunktioiden)

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

$$\int |x| dx = \frac{1}{2}x|x| + C,$$

$$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C,$$

$$\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan(x/2)\right) + \ln(2 + \cos x) + C.$$

Joukko integrointikaavoja saadaan suoraan alkeisfunktioiden derivointikaavoista. Hankalampia tapauksia varten tarvitaan erityisiä integrointitekniikkoja kuten sijoitusmenettelyä tai osittaisintegrointia. Kaikkia yksinkertaisiakaan funktioita ei kuitenkaan voida integroida alkeisfunktioiden avulla; esimerkkejä tällaisista ovat

■ integrointi  
(sijoitus)

■ integrointi  
(osittais-)

$$e^{x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}.$$

Summan derivoimiskaavan ja vakiokerrannaisen derivoimiskaavan perusteella saadaan

■ derivaatta  
(summan)

■ derivaatta  
(vakiokerrannaisen)

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \\ \int [cf(x)] dx &= c \int f(x) dx \quad (c \text{ vakio}), \end{aligned}$$

ts. summa voidaan integroida termeittäin ja vakion saa tuoda integraalimerkin eteen.

## Suoria integrointikaavoja I

Alkeisfunktioiden derivointikaavoista saadaan suoraan seuraavat integrointikaavat tavallisimmille alkeisfunktioille:

■ derivointi (alkeisfunktioiden)

■ alkeisfunktio

$$\begin{aligned}\int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, \\ \int e^x dx &= e^x + C, \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ \int \sinh x dx &= \cosh x + C, \\ \int \cosh x dx &= \sinh x + C.\end{aligned}$$

Huomattakoon kaava  $\int 1/x dx = \ln |x| + C$ , missä logaritmin sisällä on itseisarvomerkit. Jos  $x > 0$ , tämä seuraa logaritmin derivoimiskaavasta. Jos  $x < 0$ , on integraalifunktio  $\ln(-x)$ , koska tämän derivaatta yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti on  $1/x$ . Itseisarvomerkit ovat usein oleelliset, koska integroitava funktio  $1/x$  on määritelty myös argumentin negatiivisilla arvoilla, mutta  $\ln x$  ei (reaalisena).

■ logaritmifunktio

■ derivaatta (yhdistetyn funktion)

**Suoria integrointikaavoja II**

Seuraavat hieman monimutkaisempien funktioiden integrointikaavat ovat myös suoria seurauksia alkeisfunktioiden derivointikaavoista:

■ derivointi (alkeisfunktioiden)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C, \\
 \int (1 + \tan^2 x) dx &= \tan x + C, \\
 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C, \\
 \int (1 + \cot^2 x) dx &= -\cot x + C, \\
 \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx &= \tanh x + C, \\
 \int (1 - \tanh^2 x) dx &= \tanh x + C, \\
 \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx &= -\coth x + C, \\
 \int (1 - \coth^2 x) dx &= \coth x + C, \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, \quad |x| \leq 1, \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\arccos x + C, \quad |x| \leq 1, \\
 \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C, \\
 \int \frac{1}{1+x^2} dx &= -\operatorname{arccot} x + C, \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \operatorname{arsinh} x + C, \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \operatorname{arcosh} x + C, \quad x \geq 1, \\
 \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \operatorname{artanh} x + C, \quad |x| < 1, \\
 \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \operatorname{arcoth} x + C, \quad |x| > 1.
 \end{aligned}$$

## Integraalifunktion jatkuvuudesta

Koska integraalifunktio on derivoituva, se on myös jatkuva. Tähän ominaisuuteen on kiinnitettävä erityistä huomiota seuraaventyypisissä tilanteissa.

Yhdistetyn funktion derivoimissääntöä käyttäen voidaan todeta, että funktion  $\arctan(1/x)$  derivaatta on  $f(x) = -1/(1+x^2)$ . Funktio  $\arctan(1/x)$  ei kuitenkaan kelpaa integraalifunktioksi, koska se ei ole jatkuva origossa:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Määritelläänpä arvo origossa siis miten tahansa, funktiosta ei saada jatkuvaa.

Funktio

$$F(x) = \begin{cases} \arctan(1/x) + \pi, & \text{kun } x < 0, \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0, \\ \arctan(1/x), & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

sen sijaan on origossa jatkuva ja myös derivoituva; erotusosamäärän raja-arvoa tarkastelemalla nähdään derivaataksi  $F'(0) = -1 = f(0)$ . Funktion  $f(x) = -1/(1+x^2)$  kaikki integraalifunktiot ovat siten esitettävissä muodossa  $F(x) + C$ .

Jos toisaalta integroitavan funktion määrittelyalue jakautuu kahteen (tai useampaan) osaan esimerkiksi siten, että funktio ei jossakin pisteessä ole määritelty, voidaan integraalifunktio muodostaa kussakin osa-alueessa muista täysin riippumattomasti.

Esimerkiksi origo jakaa funktion  $f(x) = 1/x$  määrittelyalueen kahteen osaan. Integraalifunktioksi voidaan tällöin aivan hyvin valita

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + 2, & \text{kun } x < 0, \\ \ln|x| + 3, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

■ derivoituvuus  
■ jatkuvuus  
■ derivaatta (yhdistetyn funktion)  
■ arcus-funktio  
■ derivaatta  
■ raja-arvo (toispuolinen)

■ erotusosamäärä  
■ raja-arvo (funktion)