

Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen

Itseisarvoyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, joka sisältää reaalilukujen itseisarvolausekkeita. Tarkastelu rajoittuu siis reaalisiin yhtälöihin ja näiden reaalisten ratkaisujen etsimiseen.

■ yhtälö

■ itseisarvo
(reaaliluvun)

Lähestymistapoja on periaatteessa kaksi:

1) Reaalilukujoukko, josta ratkaisuja etsitään, jaetaan osiin sen mukaisesti, että jokaisesta itseisarvolausekkeesta kussakin osa-alueessa tiedetään merkki. Tällöin saadaan itseisarvomerkkit poistetuiksi ja joudutaan ratkaisemaan tavallinen yhtälö erikseen jokaisessa osa-alueessa. Esimerkiksi jos yhtälössä esiintyy lauseke $|x + 3|$, tarvitaan kaksi osa-aluetta, joissa itseisarvot poistuvat seuraavasti:

$$\begin{aligned}x \geq -3 & : & |x + 3| &= x + 3, \\x \leq -3 & : & |x + 3| &= -(x + 3).\end{aligned}$$

2) Korotetaan yhtälö sopivasti toiseen potenssiin tavoitteena saada itseisarvolausekkeet poistetuiksi: onhan esimerkiksi $|x + 3|^2 = (x + 3)^2$. Uudella yhtälöllä on ainakin samat juuret kuin vanhalla, mutta sillä saattaa olla muitakin. Ks. yhtälöiden sieventäminen.

■ potenssi
(kokonaisluku-)■
sieventäminen
(yhtälön)

Kummallakin menettelyllä on haittansa. Edellisessä joudutaan ratkaisemaan useita yhtälöitä, yksi jokaista osa-aluetta kohden. Lisäksi osa-alueiden määrittäminen johtaa ainakin periaatteessa epäyhtälöiden ratkaisemiseen (esimerkissä $x + 3 > 0$). Jälkimmäisessä neliöön korottaminen johtaa alkuperäistä korkeampiasteiseen yhtälöön, jonka ratkaiseminen saattaa olla hankalaa. Lisäksi on tutkittava, ovatko saadut juuret todella myös alkuperäisen yhtälön juuria.

■ epäyhtälö

Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen: tapa 1

Esimerkkinä ratkaistakoon yhtälö $|x + 3| = |x^2 - 1| + 2x + 2$.

Tarkasteltavien osa-alueiden rajoiksi saadaan kohdat, missä lausekkeet $x + 3$ ja $x^2 - 1$ vaihtavat merkkiään. Nämä ovat $x = -3$, $x = -1$ ja $x = 1$. Osa-alueet, yhtälön muoto kussakin alueessa ja ratkaisut ko. alueessa ovat seuraavat:

$x \leq -3$:	$-x - 3 = x^2 - 1 + 2x + 2,$	ei ratkaisuja,
$-3 \leq x \leq -1$:	$x + 3 = x^2 - 1 + 2x + 2,$	$x = -2,$
$-1 \leq x \leq 1$:	$x + 3 = -x^2 + 1 + 2x + 2,$	$x = 0, x = 1,$
$x \geq 1$:	$x + 3 = x^2 - 1 + 2x + 2,$	$x = 1.$

Ratkaisuja löytyy siis kolme: $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 1$.

Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen: tapa 2

Saman yhtälön $|x + 3| = |x^2 - 1| + 2x + 2$ ratkaiseminen voidaan tehdä myös seuraavasti:

Korottamalla yhtälö puolittain toiseen potenssiin saadaan

$$x^2 + 6x + 9 = (x^2 - 1)^2 + (2x + 2)^2 + 2(2x + 2)|x^2 - 1|,$$

mikä voidaan sieventää muotoon

$$-x^4 - x^2 - 2x + 4 = 2(2x + 2)|x^2 - 1|.$$

Jotta itseisarvomerkit saataisiin poistetuiksi, on korotettava uudelleen neliöön, jolloin sievennysten jälkeen saadaan kahdeksannen asteen yhtälö

$$x^8 - 14x^6 - 28x^5 + 9x^4 + 68x^3 + 12x^2 - 48x = 0.$$

Tällä on juuret (ks. polynomiyhtälöt)

$$x_1 = -2, x_2 = 0, x_{34} = 1, x_{56} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{33}), x_{78} = \frac{1}{2}(-3 \pm i\sqrt{7}).$$

Kaksi viimeistä, x_7, x_8 , eivät kompleksisina tule kysymykseen ja juuret x_5, x_6 eivät toteuta alkuperäistä yhtälöä, kuten sijoittamalla voidaan todeta. Ratkaisut ovat siis samat kuin tavan 1 antamat: $x = -2, x = 0$ ja $x = 1$.

■
sieventäminen
(yhtälön)

■ yhtälö
(polynomi-)

Graafinen esitys itseisarvoyhtälön ratkaisemisessa

Esimerkkiyhtälön ratkaisua helpottaa oleellisesti kuvaajan piirtäminen ennen laskuja esimerkiksi graafista laskinta tai jotakin ohjelmistoa käyttäen. Kun kaikki termit siirretään yhtäläisyysmerkin vasemmalle puolelle on tarkasteltavana funktio

■ funktio

$$f(x) = |x + 3| - |x^2 - 1| - 2x - 2.$$

Lukija piirtäköön tämän ja neliöön korotuksilla saadun kahdeksannen asteen polynomin

$$p(x) = x^8 - 14x^6 - 28x^5 + 9x^4 + 68x^3 + 12x^2 - 48x$$

kuvaajat!

■ kuvaaja