

## Polynomit

1/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

ESITIEDOT: ■ summa ja tulo

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ polynomien tekijöihin jako, ■ polynomiyhtälöt,

■ binomi- ja multinomikertoimet, ■ reaalfunktiot

## Polynomi

Yhden muuttujan — tässä  $x$  — *polynomiksi* kutsutaan lauseketta

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Muuttujasta  $x$  esiintyy siis vain ei-negatiivisia kokonaislukupotensseja. Luvut  $a_k$  ovat polynomin *kertoimet*. Jos ne ovat kaikki reaalisia, puhutaan *reaaliker-toimisesta polynomista*; jos joukossa on myös imaginaarilukuja, polynomi on *kompleksikertoiminen*. (Reaalikertoiminen polynomi on siis kompleksikertoimi-sen erikoistapaus, ts. vaikka kaikki kertoimet olisivatkin reaalisia, voidaan poly-nomia ajatella kompleksikertoimisena.)

■ potenssi  
(kokonaisluku-)

■ reaaliluku

■  
kompleksiluku

Muuttujan korkein esiintyvä potenssi on polynomin *asteluku*. Eo. polynomin as-teluku on siis  $n$ , jos  $a_n \neq 0$ .

Yksinkertaisia esimerkkejä muuttujan  $x$  polynomeista ovat  $x^2 + x + 1$ ,  $x^n - a^n$ , 3. Näiden asteluvut ovat 2,  $n$  ja 0.

Puhutaan myös *usean muuttujan polynomeista*. Tällaisia ovat esimerkiksi

$$x^n - y^n, \quad xy^4 + x^3y^2 + 2x^2 + 3x + y + 5 \quad \text{ja} \quad x^2y^3z^4 + y^5z^6 + z^7,$$

joissa muuttujia ovat  $x$ ,  $y$  ja  $z$ .

Yhtä ainoata luonnollista tapaa järjestää usean muuttujan polynomin termit ei ■ termi  
ole. Esimerkeistä keskimmäinen voidaan esittää mm. muodoissa

$$xy^4 + x^3y^2 + y + (2x^2 + 3x + 5) \quad \text{ja} \quad y^2x^3 + 2x^2 + (y^4 + 3)x + (y + 5)$$

riippuen siitä kumman muuttujan mukaan potenssit ensisijaisesti järjestetään. Ensimmäinen esimerkki voidaan katsoa myös yhden muuttujan  $x$  polynomik-si, jos symbolin  $y$  katsotaan olevan vakio.

Polynomi, jossa on vain yksi termi, on *monomi*, esimerkiksi  $xyz$ . Kahden termin polynomi on *binomi*, kolmen termin *trinomi*; esimerkkejä ovat  $2x + 19y^7$  ja  $x^2 + x + 1$ . Jos termejä on useampia, puhutaan *multinomeista*.

## Polynomit

2/4

■ Sisältö

ESITIEDOT: ■ summa ja tulo

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ polynomien tekijöihin jako, ■ polynomiyhdtälöt, ■ binomi- ja multinomikertoimet, ■ reaalfunktiot

## Binomikaava

*Binomikaava* antaa binomin  $x + y$  potenssin kehitettynä:

■ potenssi  
(kokonaisluku-)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Lausekkeen kertoimia

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kutsutaan *binomikertoimiksi*; tässä  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  on  $n$ -kertoma. Binomikertoimet saadaan myös Pascalin kolmiosta.

■ binomikerroin  
■ kertoma  
■ Pascalin kolmio

Binomikaava antaa esimerkiksi

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \\(x - y)^6 &= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6.\end{aligned}$$

Viimeisessä tapauksessa lauseke on ensin ajateltava muotoon  $(x + (-y))^6$ .

Binomikaavan yleistyksenä on *multinomikaava*

■  
multinomikaava

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{p_1 + p_2 + \dots + p_m = n} \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_m!} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_m^{p_m},$$

joka antaa vastaavalla tavalla multinomin  $x_1 + x_2 + \dots + x_m$  potenssit kehitettyinä.

## Polynomit

3/4

■ Sisältö

ESITIEDOT: ■ summa ja tulo

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ polynomien tekijöihin jako, ■ polynomiytälöt, ■ binomi- ja multinomikertoimet, ■ reaalfunktiot

### Polynomien jakolasku

Polynomien jakolasku voidaan tehdä jakokulmassa. Yleensä ei ole mielekästä jakaa alempiasteista polynomia korkeampiasteisella. Lähtökohtana on siis seuraava: Olkoon annettuna yhden muuttujan polynomit  $p(x)$  ja  $q(x)$ , missä  $p(x)$  on vähintään samaa astetta kuin  $q(x)$ . On etsittävä osamääräpolynomi  $u(x)$  ja jakojäännös polynomi  $v(x)$  siten, että

$$\frac{p(x)}{q(x)} = u(x) + \frac{v(x)}{q(x)},$$

ts. 'jakolaskun tulos on osamäärä plus jakojäännös jaettuna jakajalla'. Sama voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$p(x) = q(x)u(x) + v(x),$$

ts. 'jaettava on jakaja kertaa osamäärä plus jakojäännös'.

Jakolaskua yleensä jatketaan niin pitkälle, että jakojäännös on alhaisempaa astetta kuin jakaja.

Olkoon esimerkiksi  $p(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 - 1$  ja  $q(x) = x^2 + 1$ . Jakolasku näyttää tällöin seuraavalta:

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 2 \\ x^2 + 1 \overline{) x^4 - 3x^3 - x^2 - 1} \\ \underline{x^4 \phantom{- 3x^3} + x^2} \phantom{- 1} \\ -3x^3 - 2x^2 \phantom{- 1} \\ \underline{-3x^3 \phantom{- 2x^2} - 3x} \phantom{- 1} \\ -2x^2 + 3x - 1 \\ \underline{-2x^2 \phantom{+ 3x} - 2} \\ 3x + 1 \end{array}$$

Osamäärä on siis  $u(x) = x^2 - 3x - 2$  ja jakojäännös  $v(x) = 3x + 1$ .

## Polynomit

4/4

■ Sisältö

ESITIEDOT: ■ summa ja tulo

■ Hakemisto

KATSO MYÖS: ■ potenssi, ■ polynomien tekijöihin jako, ■ polynomiyhtälöt, ■ binomi- ja multinomikertoimet, ■ reaalfunktiot

## Polynomifunktio

Reaalialueen polynomifunktion

■ funktio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kuvaajalla on eräitä sille luonteenomaisia piirteitä.

Jos polynomi on ensimmäistä astetta, sen kuvaaja on suora. Toisen asteen polynomin kuvaaja on paraabeli, joka aukeaa ylöspäin, jos toisen asteen termin kerroin on positiivinen, ja alaspäin, jos se on negatiivinen. Kolmannen asteen polynomin kuvaajaa kutsutaan usein *kuutioparaabeliksi*.

■ suora

■ suora (yhtälö)

■ paraabeli  
(kartioleikkauk-  
sena)

Yleisesti polynomifunktion kuvaajalla on seuraavat ominaisuudet:

■ paraabeli (xy-  
koordinaateissa)

Jos polynomi on parillista astetta ja korkeimman asteen termin kerroin  $a_n$  on positiivinen, käyrä katoaa äärettömyyteen positiivisen y-akselin suunnassa, kun argumentti  $x$  etääntyy origosta riittävän pitkälle; raja-arvojen avulla ilmaistuna:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = +\infty$ . Jos  $a_n$  on negatiivinen, on vastaavasti  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = -\infty$ .

■ raja-arvo  
(funktion)

Jos polynomi on paritonta astetta ja  $a_n > 0$ , argumentin  $x$  kasvaessa kuvaaja tulee negatiivisen y-akselin suunnasta ja jollakin tavoin heilahdeltuaan katoaa positiivisen y-akselin suuntaan:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ . Jos  $a_n < 0$ , raja-arvot kääntyvät toisinpäin. Kummassakin tapauksessa funktio saa kaikki reaaliarvot.

Funktion kuvaaja mutkittelee äärettömyyteen menojen välissä — jonkinlaisella keskialueella — siten, että suora voi leikata sitä enintään asteluvun osoittamassa määrässä pisteitä.

Viidennen ja neljännen asteen polynomien kuvaajat:

