

Monitahokkaat

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat

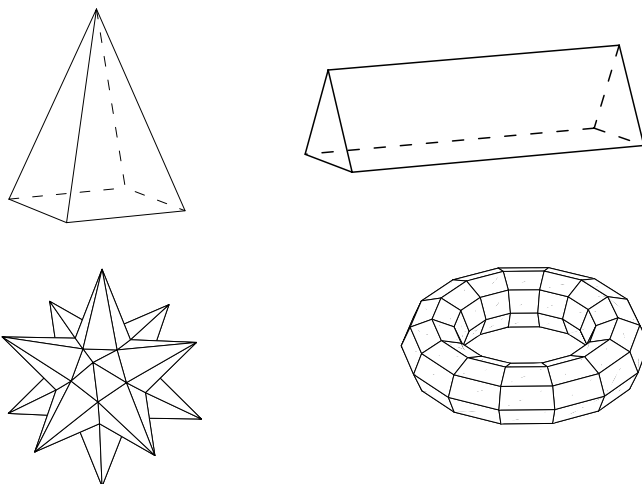
1/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Monitahokas

Monitahokkaaksi kutsutaan kolmiulotteisen avaruuden kappaletta, jota rajaavat tasopinnat. Tasopinnat ovat monitahokkaan *tahkot*; nämä leikkaavat toisensa pitkin *särmiä*, joiden päätepisteet ovat monitahokkaan *kärkiä*.



Jos monitahokkaassa ei ole aukkoja yllä olevan viimeisen esimerkin tapaan (tämällisemmin sanottuna jos monitahokas on yhdesti yhtenäinen), on voimassa *Eulerin yhtälö*, jonka tosin jo Descartes tunsi:

■ Euler

■ Descartes

$$f - e + v = 2,$$

missä f on monitahokkaan tahkojen lukumäärä, e särmien lukumäärä ja v kärkien lukumäärä. (Symbolit ovat englannista peräisin: *face*, *edge*, *vertex*.)

Jos monitahokkaassa on yksi tai useampia aukkoja, riippuu kaavan oikea puoli aukkojen lukumäärästä. Esimerkiksi yksiaukkoisessa tapauksessa on $f - e + v = 0$.

Monitahokkaat

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat

2/4

■ Sisältö

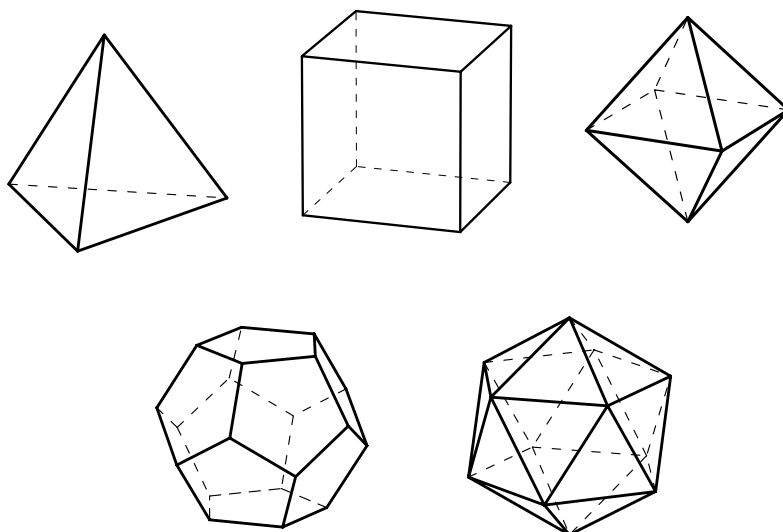
■ Hakemisto

Säännölliset monitahokkaat

Monitahokasta sanotaan säännölliseksi, jos sen kaikki tahkot ovat samanlaisia säännöllisiä monikulmioita ja kaikki kärjet samanlaisia.

■ monikulmio

Jo antiikin kreikkalaiset tiesivät, että säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi: *tetraedri*, *heksaedri* eli *kuutio*, *oktaedri*, *dodekaedri* ja *ikosaedri*.



Näiden kärkien, särmien ja tahkojen määrät ovat seuraavat:

	kärjet	särmät	tahkot
tetraedri	4	6	4
heksaedri	8	12	6
oktaedri	6	12	8
dodekaedri	20	30	12
ikosaedri	12	30	20

Yhdistämällä säännöllisen monitahokkaan sivutahkojen keskipisteet saadaan tämän sisään toinen säännöllinen monitahokas: Tetraedrin tapauksessa tetraedri, kuution sisään oktaedri ja oktaedrin sisään kuutio, dodekaedrin sisään ikosaedri ja ikosaedrin dodekaedri. Tämä on pääteltävissä edellä olevan taulukon symmetrioistakin.

Monitahokkaat

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat

3/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Symmetrisistä monitahokkaista

Jokaisesta säännöllisestä monitahokkaasta voidaan muodostaa uusi monitahokas seuraavalla tavalla: Jokaisen sivutahkon päälle asetetaan keskenään samanlaiset pyramidit, joiden pohjina sivutahkot ovat. Pyramidien korkeus valitaan siten, että kahden vierekkäisen pyramidin huiput ja niiden yhteisen pohjasärmän päätepisteet ovat samassa tasossa; näiden neljän pisteen määräämästä nelikulmiosta tulee uuden kappaleen sivutahko.

■ pyramidi

Tetraedrin tapauksessa tällöin syntyy kuutio. Kuutiosta ja oktaedrista saadaan monitahokas, jota kutsutaan *rombidodekaedriksi* (rombi = neljäkäs, vinoneliö). Dodekaedrista ja ikosaedrista syntyy sama 30-tahokas.

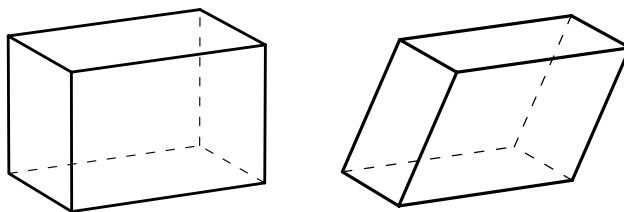
■ vinoneliö

Rombidodekaedri ja em. 30-tahokas eivät ole säännöllisiä monitahokkaita, vaikka niistä onkin löydettävissä monia symmetrioita.

Yksinkertaisempia symmetrisiä, mutta ei säännöllisiä monitahokkaita ovat *suorakulmainen särmiö*, jonka kaikki sivutahkot ovat suorakulmioita (yhteensä kuusi), ja *suuntaissärmiö* eli *paralleelipiped*i, jonka sivutahkot ovat suunnikkaita.

■ särmiö
(tilavuus)

■ suunnikas



Monitahokkaat

ESITIEDOT: ■ monikulmiot, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat

4/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi

Todistus sille, että säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi, on yllättävänkin yksinkertainen:

Koska säännöllisen monitahokkaan sivutahkot ovat samanlaisia säännöllisiä monikulmioita — olkoot n -kulmioita — on jokaisen kulman suuruus

$$(n - 2) \cdot 180^\circ / n.$$

Koska kaikki kärjet ovat samanlaisia, yhtyy jokaisessa kärjessä sama määrä p sivutahkoja. Yhdessä kärjessä kohtaavien kulmien summan tulee olla pienempi kuin täysi kulma 360° , jolloin saadaan epäyhtälö

$$p(n - 2) \cdot 180^\circ / n < 360^\circ \quad \text{eli} \quad np < 2(n + p).$$

Toisaalta on tietenkin $n \geq 3, p \geq 3$.

Ne arvot n, p , jotka toteuttavat saadun epäyhtälön, on helppo luetella ja todeta, että jokaista kyseeseen tulevaa arvoparia todellakin vastaa jokin tunnettu säännöllinen monitahokas:

n	p	np	$2(n + p)$	
3	3	9	12	tetraedri
3	4	12	14	oktaedri
3	5	15	16	ikosaedri
3	6	18	18	epäyhtälö ei toteudu
4	3	12	14	kuutio
4	4	16	16	epäyhtälö ei toteudu
5	3	15	16	dodekaedri
5	4	20	18	epäyhtälö ei toteudu
6	3	18	18	epäyhtälö ei toteudu

Koska muita epäyhtälön toteuttavia arvopareja ei ole, ei ole olemassa myöskään muita säännöllisiä monitahokkaita.

■ monikulmio

■ kulma (taso-)

■ epäyhtälö