

## Rationaalifunktion lauseke

*Rationaalifunktiot* ovat muotoa

■ funktio

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä  $p(x)$  ja  $q(x)$  ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei välttämättä ole määritelty kaikilla arvoilla  $x$ ; pois on jätettävä nimittäjän mahdolliset nollakohdat.

■ polynomi

Jos sekä osoittajalla että nimittäjällä on sama nollakohta  $x = a$ , voidaan lauseke supistaa tekijällä  $x - a$  (tai mahdollisesti tämän korkeammalla potenssilla); ks. polynomin tekijöihin jako. Jos  $x = a$  ei tämän jälkeen enää ole nimittäjän nollakohta, saadaan määrittelyalue laajennetuksi myös pisteeseen  $x = a$ . (Jos  $a$  supistamisen jälkeen on nimittäjän, mutta ei osoittajan nollakohta, ei laajennusta saada aikaan. Tällöin sekä osoittajalla että nimittäjällä oli tekijänä lausekkeen  $x - a$  potenssi, mutta tämä oli korkeampaa astetta nimittäjässä.)

■ osoittaja

■ nimittäjä

■ supistaminen

■ potenssi  
(kokonaisluku-)

■ tekijöihin jako  
(polynomin)

Jos rationaalifunktion osoittaja on samaa tai korkeampaa astetta kuin nimittäjä, voidaan suorittaa polynomien jakolasku. Tällöin rationaalifunktio saadaan muotoon

■ tekijöihin jako  
(polynomin)

■ tekijöihin jako  
(polynomin)

■ asteluku

■ jakolasku  
(polynomien)

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = u(x) + \frac{v(x)}{q(x)},$$

missä  $u(x)$  ja  $v(x)$  ovat polynomeja ja  $v(x)$  on alempaa astetta kuin jakaja  $q(x)$ .

Jos alkuperäisen rationaalifunktion osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä, on rationaalifunktio jo valmiiksi tällaisessa muodossa; tällöin siis  $u(x) = 0$  kaikilla  $x$ .

## Asymptootit

Rationaalifunktion  $r(x) = p(x)/q(x)$  (missä  $p(x)$  ja  $q(x)$  polynomeja) *asymptootti* on suora tai käyrä, jota kuvaaja  $y = r(x)$  rajatta lähestyy, kun  $xy$ -tasossa jollakin tavoin siirrytään äärettömyyteen.

Nimittäjän  $q(x)$  nollakohdat  $a_k$  antavat kuvaajan *pystysuorat asymptootit*  $x = a_k$ . Näissä kohdissa funktion  $r(x)$  raja-arvo on  $+\infty$  tai  $-\infty$ ; mahdollisesti eri puolilta lähestyttäessä erilainen.

Jos rationaalifunktio  $r(x)$  kirjoitetaan muotoon  $r(x) = u(x) + v(x)/q(x)$ , missä polynomi  $v(x)$  on alempaa astetta kuin polynomi  $q(x)$ , on

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [r(x) - u(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x)/q(x) = 0.$$

Tällöin rationaalifunktion kuvaaja  $y = r(x)$  lähestyy käyrää  $y = u(x)$ , kun  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Jos polynomi  $u(x)$  on astetta 0, ts.  $u(x) = c_0 = \text{vakio}$ , on rationaalifunktion kuvaajalla *vaakasuora asymptootti*  $y = c_0$ .

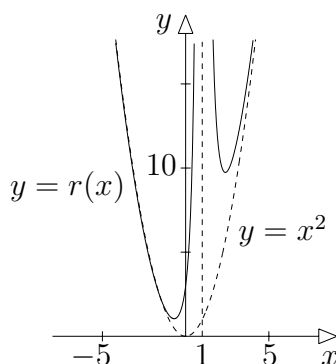
Jos asteluku on 1, on  $u(x) = c_1x + c_0$  ja rationaalifunktiolla on *vino asymptootti*  $y = c_1x + c_0$ .

Jos  $u(x)$  on korkeampaa astetta, sanotaan, että rationaalifunktiolla on *käyräviivainen asymptootti*  $y = u(x)$ .

Esimerkki: Rationaalifunktiolla

$$r(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} = x^2 + \frac{2x + 3}{(x - 1)^2}$$

on pystysuora asymptootti  $x = 1$  ja käyräviivainen asymptootti  $y = x^2$ . Kuvaaja:



■ funktio  
 ■ polynomi  
 ■ käyrä (taso-)  
 ■ kuvaaja  
 ■ nimittäjä  
 ■ raja-arvo (funktion)  
 ■ asteluku