

## Derivaatta

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

1/6

■ Sisältö

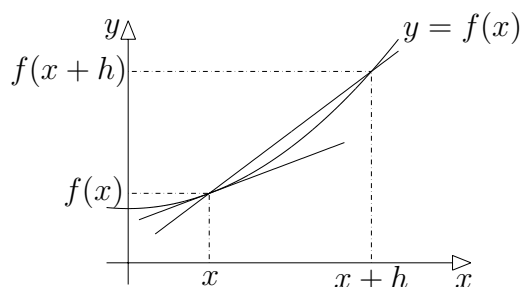
■ Hakemisto

### Derivaatan määritelmä

Olkoon  $x$  kiinteä tarkastelupiste. Reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion  $f$  *derivaatta* tässä pisteessä — merkitään  $f'(x)$  — voidaan luonnehtia kahdella tavalla: 1) geometrisesti, jolloin kyseessä on käyrän  $y = f(x)$  pisteeseen  $(x, f(x))$  asetetun tangentin kulmakerroin, tai 2) analyttisesti *erotusosamäärän* raja-arvona:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Erotusosamäärässä  $[f(x+h) - f(x)]/h$  on nimittäjässä argumenttiarvojen  $x+h$  ja  $x$  erotus; osoittajassa on vastaavien funktionarvojen erotus. Geometrisesti tulkituna erotusosamäärä tarkoittaa pisteiden  $(x, f(x))$  ja  $(x+h, f(x+h))$  kautta asetetun suoran — käyrän  $y = f(x)$  sekantin — kulmakerrointa. Rajaprosessissa  $h \rightarrow 0$  pisteet lähestyvät toisiaan ja sekantti muuttuu tangentiksi.



Derivaatalle käytetään seuraavia merkintöjä:

$$f'(x) = D f(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

■ funktio  
(reaali-)

■ käyrä (taso-)

■ tangentti  
(suora)

■ kulmakerroin

■ raja-arvo  
(funktion)

■ sekantti  
(suora)

## Derivaatta

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

2/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

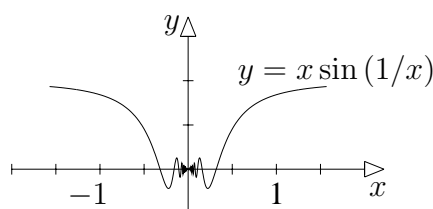
## Derivoituvuus

Derivaatta, so. erotusosamäärän raja-arvo ei välttämättä ole olemassa. Jos se on, funktiota sanotaan *derivoituvaksi* kyseisessä pisteessä  $x$ .

■ raja-arvo  
(funktion)

Esimerkkejä funktioista, jotka jossakin pisteessä eivät ole derivoituvia, ovat a)  $f(x) = |x|$  origossa ja b)  $f(x) = x \sin(1/x)$  samoin origossa (missä määritellään  $f(0) = 0$ ). Edellisen kuvaajalla on origossa kärki, jälkimmäisen käyttäytyminen on paljon monimutkaisempaa:

■ kuvaaja



Funktion määritelmä on siinä määrin yleinen, että on helppoa muodostaa myös funktioita, jotka eivät ole missään derivoituvia tai ovat derivoituvia vain muutamissa pisteissä. Esimerkiksi määrittelemällä  $f(x) = x^2$ , jos  $x$  on rationaalinen, ja  $f(x) = -x^2$ , jos  $x$  on irrationaalinen, saadaan funktio, joka on derivoituva vain origossa.

■ rationaaliluku  
■ irrationaaliluku

## Derivaatta

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

3/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

## Differentiaali

Määritellään kahden muuttujan funktio  $\epsilon(x, h)$  asettamalla

$$\epsilon(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Koska derivoituvalla funktiolla erotusosamäärän raja-arvo on derivaatta, on

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(x, h) = 0.$$

Kertomalla eo. yhtälö symbolilla  $h$  ja siirtämällä termejä yhtäläisyysmerkin puolelta toiselle, saadaan

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\epsilon(x, h),$$

missä funktion lisäys  $f(x+h) - f(x)$  välillä  $[x, x+h]$  on hajotettu kahdeksi termiksi: Edellinen termi

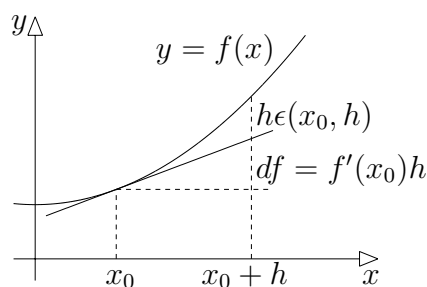
■ funktio  
(kahden  
muuttujan)

■ raja-arvo  
(funktion)

■ väli  
(reaaliakselin)

$$df = f'(x)h$$

on funktion *differentiaali*, jälkimmäistä  $h\epsilon(x, h)$  (missä  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(x, h) = 0$ ) kutsutaan yleensä *korjaustermiksi*. Differentiaalın sanotaan edustavan funktion  $f$  lisäyksen lineaarista (suoraviivaista) osaa. Funktiol lisäyksen hajottamista tällä tavoin kutsutaan funktion *differentiaalikehitelmäksi*.



Tekemällä differentiaalikehitelmässä korvaukset  $x \rightarrow x_0$ ,  $x+h \rightarrow x$ ,  $h \rightarrow x-x_0$  se voidaan kirjoittaa muotoon

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0).$$

Korjausterman pois jättäminen voidaan tämän perusteella luonnehtia siten, että käyrä  $y = f(x)$  tulee korvatuksi tangentilla  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Differentiaalikehitelmästä nähdään myös, että derivoituva funktio on aina myös jatkuva:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0)] = f(x_0).$$

■ käyrä (taso-)

■ tangentti  
(suora)

■ jatkuvuus

## Derivaatta

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

4/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Korkeammat derivaatat

Jos funktio  $f$  on jollakin tarkasteluvälillä derivoituva välin jokaisessa pisteessä, tulee tällä välillä määritellyksi *derivaattafunktio*  $f'(x)$ . Jos tämä on derivoituva välin pisteessä  $x$ , saadaan alkuperäisen funktion *toinen derivaatta* eli *toisen kertaluvun derivatta*:

$$\frac{d}{dx}f'(x) = f''(x) = D^2f(x) = \frac{d^2f}{dx^2},$$

missä kolme viimeksi mainittua ovat tavallisimmat tavat toisen derivaatan merkitsemiseen.

Jos funktio  $f''(x)$  saadaan määritellyksi jollakin välillä, voidaan jatkaa samaan tapaan ja saadaan *korkeampien kertalukujen* derivaatat  $f'''(x)$ ,  $f''''(x)$ , jne.

Jos derivaatan kertaluku on kovin suuri, sitä ei enää ole mukavaa merkitä yläpilkuilla. Vaihtoehtoinen merkintätapa on käyttää sulkuihin pantua yläindeksiä, esimerkiksi  $f''''(x) = f^{(4)}(x)$ .

## Derivaatta

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

5/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkkejä derivaatan laskemisesta erotusosamäärän raja-arvona

Funktion  $f(x) = x^5$  derivaatta pisteessä  $x$  saadaan kehittämällä erotusosamäärä binomikaavan avulla:

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^5 - x^5}{h} &= \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} \\ &= 5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4.\end{aligned}$$

■ binomikaava

■ binomikaava

Kun  $h \rightarrow 0$ , lähestyvät kaikki muut termit nollaa paitsi ensimmäinen ja derivaattaksi saadaan siis  $5x^4$ .

■ raja-arvo  
(funktion)

Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  derivaatta pisteessä  $x > 0$  saadaan vastaavalla tavalla muokkaamalla erotusosamäärää siten, että sen raja-arvo voidaan laskea:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

## Derivaatta

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: ■ derivointisäännöt, ■ alkeisfunktioiden derivaatat

6/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Derivaatan historiaa

Differentiaalilaskennan samoin kuin integraalilaskennan — lyhyemmin matemaattisen analyysin — keksijöinä pidetään englantilaista Isaac Newtonia (1642 – 1727) ja saksalaista Gottfried Wilhelm Leibnizia (1646 – 1716). Samantyyppisiä ideoita oli kyllä esiintynyt jo varhemminkin. Mm. ranskalainen lakimies ja matemaatikko Pierre de Fermat käytti oleellisesti derivointia polynomien maksimien ja minimien etsimiseen 1600-luvun alussa. Integraalilaskennan historia ulottuu vielä paljonkin varhaisempiin aikoihin; ensimmäiset ideat voidaan hieman näkökulmasta riippuen löytää jo vanhalta ajalta.

Newtonin pääteos *Philosophiae naturalis principia mathematica* käsittelee fysiikkaa ja taivaanmekaniikkaa, joihin hän soveltaa jo aiemmin kehittämiään (mutta julkaisemattomia) differentiaali- ja integraalilaskennan menetelmiä sekä päättymättömiä sarjoja. Esitystapa ja merkinnät poikkeavat nykyään käytetystä; derivaatan käsitettä vastaa Newtonin 'fluxio'.

Leibniz oli yleisnero, joka tutki matematiikan ohella lakia, filosofiaa, teologiaa ym. ja toimi pitkään diplomaattina. Differentiaali- ja integraalilaskennan hän kehitti ilmeisestikin Newtonista riippumatta. Seurauksena kuitenkin oli riita prioriteetista.

Newtonin ja Leibnizin jälkeen analyysia kehittivät monet: sveitsiläinen Bernoulli'n suku, jossa oli useita matemaatikkoja 1600-luvun lopulta 1800-luvun puoliväliin, niinikään sveitsiläissyntyinen Leonhard Euler (1707 – 1783), joka oli professorina Pietarissa ja Berliinissä, Ranskan suuren vallankumouksen ja Napoleonin aikalaiset Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon de Laplace, Jean-Baptiste-Joseph Fourier, ym., saksalainen Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), ranskalainen Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857).

Monet näistä matemaatikoista olivat myös huomattavia matemaattisia fyysikoita, jotka kehittivät taivaanmekaniikkaa, optiikkaa, virtausmekaniikkaa, jne.

Analyysin kehitys on jatkunut viime ja tällä vuosisadalla yhä abstraktimpaan suuntaan.

■ analyysi

■ Newton

■ Leibniz

■ Fermat

■ polynomi

■ maksimi ja minimi

■ maksimi ja minimi

■ sarja

■ Bernoulli

■ Bernoulli

■ Euler

■ Lagrange

■ Laplace

■ Fourier

■ Gauss

■ Cauchy