

## Funktion raja-arvo

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ lukujonon raja-arvo, ■ funktion jatkuvuus

1/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkki funktion raja-arvosta

Lauseke

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

määrittelee reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion  $f$ , jonka lähtöjoukko muodostuu nollasta eroavista reaaliluvuista. Periaatteessa  $f(0)$  voidaan määritellä miten tahansa. Luontevaa kuitenkin on ensin tutkia, miten funktio  $f$  käyttäytyy, kun  $x$  on lähellä origoa.

■ funktio

■ funktio  
(reaali-)

■ lähtöjoukko

Jos funktion arvot lähestyvät jotakin kiinteää arvoa, kun  $x$  lähestyy origoa, kyseistä arvoa sanotaan *funktion raja-arvoksi* origossa. Tällöin on myös luontevaa määritellä  $f(0)$  juuri täksi arvoksi (jolloin funktiosta  $f$  tulee jatkuva funktio).

■ jatkuvuus

Numeeriset kokeilut antavat seuraavat tulokset:

$$x = \pm 0.5, \quad f(x) = 0.489669752;$$

$$x = \pm 0.05, \quad f(x) = 0.499895842;$$

$$x = \pm 0.005, \quad f(x) = 0.499998958;$$

$$x = \pm 0.0005, \quad f(x) = 0.499999989.$$

Näyttäisi siis, että funktion raja-arvo origossa on  $= \frac{1}{2}$ . (Numeerisissa kokeiluissa on tosin oltava varovainen, koska pyöristysvirheet voivat yllättäen aiheuttaa jopa täysin virheellisiä tuloksia.)

■  
pyöristysvirhe

Esimerkin tapauksessa raja-arvo todellakin on  $= \frac{1}{2}$  ja merkitään

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

## Funktion raja-arvo

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ lukujonon raja-arvo, ■ funktion jatkuvuus

2/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Funktion raja-arvon määritelmä

Yleisesti reaalifunktion raja-arvon käsite määritellään seuraavalla tavalla:

Jotta funktion  $f$  raja-arvo pisteessä  $a$  olisi  $b$  (merkitään  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ), on tilanteen oltava sellainen, että asetetaanpa miten tiukka etäisyysvaatimus tahansa, funktion arvot ovat tätä etäisyyttä lähempänä arvoa  $b$ , kun muuttuja  $x$  rajoitetaan riittävän lähelle tarkastelukohtaa  $a$ .

Mitä tiukempi etäisyysvaatimus on, sitä pienempään pisteen  $a$  ympäristöön muuttuja  $x$  on yleensä rajoitettava. Jokaista positiivista etäisyyskynnystä vastaa kuitenkin aina jokin, ehkä hyvinkin pieni alue pisteen  $a$  ympärillä, jossa vaatimus toteutuu. Funktion arvosta pisteessä  $a$  ei tällöin vaadita mitään; funktion ei tarvitse edes olla tässä pisteessä määritelty.

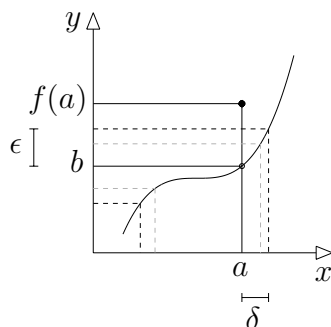
Täsmällisemmin lausuttuna edellä oleva voidaan ilmaista seuraavasti:

Funktion  $f$  raja-arvo pisteessä  $a$  on  $b$ , jos jokaista etäisyyskynnystä  $\epsilon$  ( $> 0$ ) kohden on olemassa pisteen  $a$  ympäristöä rajaava luku  $\delta$  (myös  $> 0$ ) siten, että  $|f(x) - b| < \epsilon$ , kun  $|x - a| < \delta$  ja  $x \neq a$ .

Itseisarvolausekkeet  $|x - a|$  ja  $|f(x) - b|$  on syytä mieltää lukujen  $x$  ja  $a$ , vastavasti  $f(x)$  ja  $b$  välisiksi etäisyyksiksi.

■ funktio  
(reaali-)

■ itseisarvo  
(reaaliluvun)



## Funktion raja-arvo

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ lukujonon raja-arvo, ■ funktion jatkuvuus

3/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Toispuoliset raja-arvot; raja-arvo $\infty$ ja raja-arvo äärettömyydessä

Funktio saattaa käyttäytyä myös siten, että muuttujan  $x$  lähestyessä kohtaa  $a$  sen arvot lähestyvät eri arvoja riippuen siitä kummalta puolen  $x$  lähestyy arvoa  $a$ . Tällaisessa tilanteessa puhutaan funktion *oikeanpuolisesta* ja *vasemmanpuolisesta raja-arvosta*. Näitä merkitään

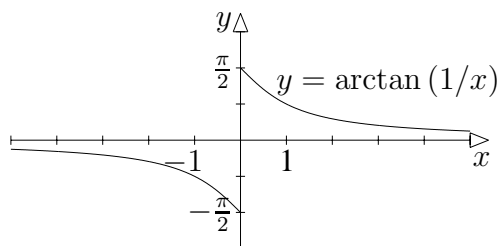
$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x),$$

jolloin luvun  $a$  perässä oleva plusmerkki tarkoittaa oikeanpuolista, miinusmerkki vasemmanpuolista lähestymistä.

Esimerkki tällaisesta funktiosta on  $\arctan(1/x)$  origossa, jolle

■ arcus-funktio

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}.$$



Funktion raja-arvoa voidaan tarkastella myös, kun muuttuja  $x$  lähestyy ääretöntä positiivisessa tai negatiivisessa suunnassa. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{tai} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

Missä tahansa rajaprosessissa funktion arvot voivat myös lähestyä positiivista tai negatiivista ääretöntä (jolloin raja-arvon ei sanota olevan olemassa, koska se ei ole (äärellinen) reaaliluku). Merkinnät ovat ilmeiset:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \quad \text{jne.}$$

## Funktion raja-arvo

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ lukujonon raja-arvo, ■ funktion jatkuvuus

4/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Funktioiden raja-arvon laskeminen

Funktioiden raja-arvojen ja lukujonojen raja-arvojen laskeminen on usein hyvin samantyyppistä. Pohjana ovat 'itsestään selvien' (ts. määritelmän perusteella selvien) tulosten ohella summan, erotuksen, tulon ja osamäärän raja-arvoa koskevat lauseet ja tunnetut funktioiden ominaisuudet. Viimeksi mainittuja ovat mm. tiedot alkeisfunktioiden jatkuvuudesta ja edempänä mainitut standardiraja-arvot (jotka todistetaan suoraan määritelmään vedoten).

■ raja-arvo  
(lukujonon)

■ alkeisfunktio

■ jatkuvuus

Samat varovaisuusvaatimukset 'itsestään selvyysien' osalta kuin lukujonojen raja-arvoja laskettaessa on tietenkin otettava huomioon.

Raja-arvon laskemisessa tarvitaan usein seuraavia kaavoja, joissa oletetaan, että funktioiden  $f$  ja  $g$  raja-arvot  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  ovat olemassa:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (c \text{ vakio});$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Osamäärää koskevassa kaavassa tulee luonnollisesti nimittäjien olla  $\neq 0$ .

## Funktion raja-arvo

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ lukujonon raja-arvo, ■ funktion jatkuvuus

5/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkkejä funktioiden raja-arvoista

Samantyyppinen tekniikka kuin lukujonojen raja-arvojen laskemisessa soveltuu usein myös funktioiden raja-arvoille. Raja-arvoista voi myös saada tietoa piirtämällä esimerkiksi laskimella tai tietokoneella funktioiden kuvaajia — pyöristysvirheiden aiheuttamia häiriöitä varoen.

1) Olkoon  $a > 0$ . Kun  $x \rightarrow a$ , saa seuraava lauseke muodon  $0/0$ , jolloin sen raja-arvoa ei voida suoraan päätellä. Laventaminen sopivasti johtaa kuitenkin tulokseen:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

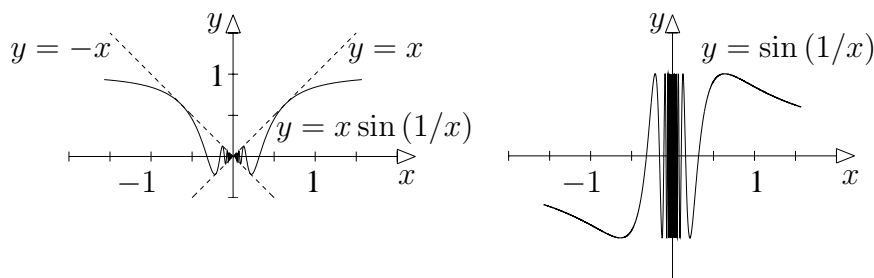
Laskun viimeisessä vaiheessa on käytetty tietoa neliöjuurifunktion jatkuvuudesta.

2) Funktio  $f(x) = x \sin(1/x)$  on määritelty, kun  $x \neq 0$ . Koska sinifunktion arvot ovat argumentista riippumatta itseisarvoltaan  $\leq 1$ , on ilmeisestikin

$$0 \leq |x \sin(1/x)| = |x| |\sin(1/x)| \leq |x|.$$

Jos nyt  $x \rightarrow 0$ , puristuu funktion arvo nollan ja nollaa lähestyvän lausekkeen  $|x|$  väliin, jolloin tulee olla  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ . (Kuva alempana.)

3) Funktiolla  $f(x) = \sin(1/x)$  ei ole raja-arvoa origossa eikä edes eri suuria oikean- ja vasemmanpuolisia raja-arvoja. Kuten oheinen kuva näyttää, funktio heilahtelee sitä tiheämmin arvojen  $-1$  ja  $1$  välillä, mitä lähempänä origoa ollaan.



■ raja-arvo  
(lukujonon)

■ kuvaaja

■  
pyöristysvirhe

■ laventaminen

■  
neliöjuurifunktio

■ jatkuvuus

■ sini

## Funktion raja-arvo

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ lukujonon raja-arvo, ■ funktion jatkuvuus

6/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Funktioiden standardiraja-arvoja

Seuraavista raja-arvoista kolme ensimmäistä muodostavat pohjan kyseessä olevien alkeisfunktioiden derivaattojen johtamiselle. Neljäs osoittaa, että eksponenttifunktio kasvaa nopeammin kuin mikä tahansa muuttujan potenssi.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty, \quad p \text{ luonnollinen luku.}$$

■ raja-arvo  
(standardi-,  
lukujonon)

■ derivointi (al-  
keisfunktioiden)

■ eksponentti-  
funktio

■  
logaritmifunktio

■  
potenssifunktio

Kolmannessa, siniä koskevassa kaavassa on argumentin oltava radiaaneissa. Raja-arvo voidaan tietenkin laskea myös siten, että  $x$  lausutaan asteissa; tällöin se ei kuitenkaan ole 1.

■ sini

■ radiaani

■ aste

Ensimmäinen kaava johtaa siihen, että eksponenttifunktion derivaatta on se itse (ks. alkeisfunktioiden derivointia). Kaava puolestaan on seuraus Neperin luvun määritelmästä, kuten seuraava osoittaa.

■ Neperin luku

Merkitsemällä  $t = 1/x$  saadaan

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t.$$

Jos  $x \rightarrow 0$ , niin  $t \rightarrow \pm\infty$ . Neperin luvun määritelmästä seuraa, että  $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^t = e$ ; pieni lisäpäätely osoittaa, että näin on myös, jos  $t \rightarrow -\infty$ . Eo. lausekkeen raja-arvo on siis  $\ln e = 1$ , kun  $x \rightarrow 0$ , ja toinen kaava on todistettu.

Ensimmäinen kaava voidaan palauttaa tähän merkitsemällä  $y = e^x - 1$  eli  $x = \ln(1+y)$ , jolloin  $x \rightarrow 0$ , jos ja vain jos  $y \rightarrow 0$ . Tällöin

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \rightarrow 1.$$

Huomattakoon, että eo. päätelyissä nojaututaan tietoon eksponentti- ja logaritmifunktioiden jatkuvuudesta: Esimerkiksi tiedosta  $(1 + 1/t)^t \rightarrow e$  seuraa  $\ln[(1 + 1/t)^t] \rightarrow \ln e$  vain, jos logaritmifunktio tiedetään jatkuvaksi pisteessä  $e$ .

■ jatkuvuus

Kolmannen ja neljännen kaavan johtoa ei tässä lähemmin käsitellä.