

Analyttistä geometriaa

ESITIEDOT: ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ ympyrä

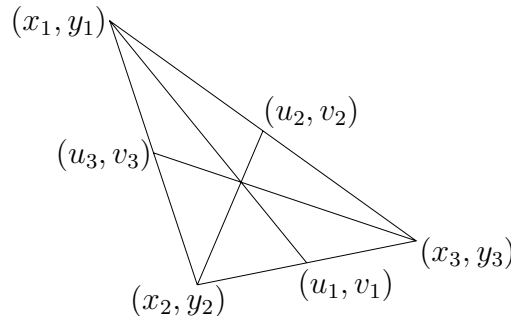
1/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

Esimerkki 1 analyttisestä geometriasta

Kolmion kärkipisteet olkoot (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) . Tavoitteena on analyttisen geometrian keinoin osoittaa, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



■ kolmio

■
koordinaatisto
(xy-)

■ keskijana
(esimerkki)

■ keskijana
(esimerkki)

■ keskijana

Kolmion sivujen keskipisteiden koordinaatit (u_1, v_1) , (u_2, v_2) ja (u_3, v_3) saadaan keskiarvoina kunkin sivun päätepisteiden koordinaateista:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{1}{2}(x_2 + x_3), & u_2 &= \frac{1}{2}(x_3 + x_1), & u_3 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \\v_1 &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3), & v_2 &= \frac{1}{2}(y_3 + y_1), & v_3 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2).\end{aligned}$$

Keskijanasuorien yhtälöt ovat

■ suora (yhtälö)

■ kulmakerroin

$$\begin{aligned}y - y_1 &= \frac{v_1 - y_1}{u_1 - x_1} (x - x_1), \\y - y_2 &= \frac{v_2 - y_2}{u_2 - x_2} (x - x_2), \\y - y_3 &= \frac{v_3 - y_3}{u_3 - x_3} (x - x_3).\end{aligned}$$

Kun näihin sijoitetaan edellä esitetyt sivujen keskipisteiden koordinaatit, saadaan sieventämisen jälkeen lineaarinen yhtälöryhmä

■ yhtälöryhmä
(lineaarinen)

$$\begin{aligned}(2x_1 - x_2 - x_3)(y - y_1) &= (2y_1 - y_2 - y_3)(x - x_1), \\(2x_2 - x_3 - x_1)(y - y_2) &= (2y_2 - y_3 - y_1)(x - x_2), \\(2x_3 - x_1 - x_2)(y - y_3) &= (2y_3 - y_1 - y_2)(x - x_3).\end{aligned}$$

Jos keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, tulee tämän pisteen koordinaattien toteuttaa jokaisen keskijanan yhtälö. Kyse on siis siitä, onko edellä olevalla kolmen yhtälön ryhmällä ratkaisua (x, y) , joka samanaikaisesti toteuttaisi kaikki kolme yhtälöä.

Ratkaisemalla yhtälöryhmä algebrallisesti — mikä vaatii kyllä hieman työntekoa — todetaan, että sillä on yksi ratkaisu:

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

Keskijanat siis leikkaavat toisensa tässä pisteessä.

Analyyttistä geometriaa

ESITIEDOT: ■ koordinaatistot, ■ piste, ■ suora, ■ taso

KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemat, ■ ympyrä

2/2

■ Sisältö

■ Hakemisto

Esimerkki 2 analyttisestä geometriasta

Olkoon annettuna kaksi tason ympyrää:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9,$$

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

■ ympyrä

■
koordinaatisto
(xy-)

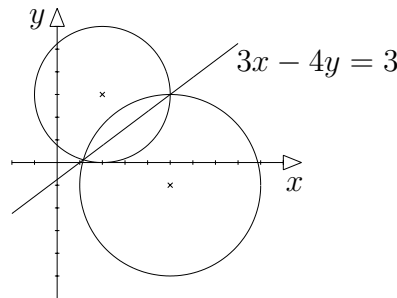
eli

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0.$$

Tehtävänä on etsiä ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö.

■ suora (yhtälö)



Asettamalla ympyröiden yhtälöiden vasemmat puolet yhtä suuriksi saadaan

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10$$

eli

$$3x - 4y = 3.$$

Tämä on ilmeisestikin suoran yhtälö. Jos sen sieventämättömään muotoon sijoitetaan ympyröiden leikkauspisteen koordinaatit (kumpikin piste vuorollaan), yhtälö toteutuu, koska kumpikin puoli on $= 0$. Tällöin leikkauspisteiden koordinaatit toteuttavat myös sievennetyn yhtälön, ts. pisteet sijaitsevat yhtälön esittämällä suoralla.

Suora $3x - 4y = 3$ on siis ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Tämän määrittämistä varten ei leikkauspisteiden koordinaatteja tarvinnut laskea!