

Toisen asteen käyrät

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ■ ympyrä, ■ toisen asteen pinnat

1/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

Toisen asteen käyrä

Toisen asteen käyräksi kutsutaan käyrää, jonka yhtälö xy -koordinaatistossa on muuttujien x ja y suhteen toista astetta. Yleisimmässä muodossaan tämä on

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

missä A, B, C, D, E ja F ovat vakioita. (Yhtälössä esiintyvät kakkoset ovat epäolennaisia; kertoimet on tapana kirjoittaa tähän muotoon, koska tällöin yhtälön pidemmälle menevä käsittely johtaa hieman yksinkertaisempiin lausekkeisiin.)

Kertoimista riippuen yhtälö esittää erilaisia käyriä. Päätyypit ovat ellipsi (sisältyen erikoistapauksenaan ympyrän), paraabeli ja hyperbeli. Yhtälö voi esittää myös yhtä tai kahta suoraa tai yhtä ainoaa pistettä. Lisäksi on mahdollista, että mikään piste (x, y) ei toteuta sitä eikä se siis esitä geometrisesti mitään.

Ellipsien, paraabelien ja hyperbelien tarkempi käsittely on edempänä.

Seuraavat esimerkit esittävät yhtä suoraa, kahta yhdensuuntaista suoraa, kahta toisensa leikkaavaa suoraa ja pistettä; viimeinen ei esitä mitään:

$$\begin{aligned}(x + y - 1)^2 &= 0, \\(x + y - 1)(x + y - 2) &= 0, \\(x + y - 1)(x - y - 1) &= 0, \\2(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2 &= 0, \\2(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2 + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Tarkempaa yleisen toisen asteen käyrän tutkimista ei tässä käsitellä.

■ käyrä (taso-)

■ yhtälö

■
koordinaatisto
(xy -)

■ ympyrä

■ suora (yhtälö)

Toisen asteen käyrät

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ■ ympyrä, ■ toisen asteen pinnat

2/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

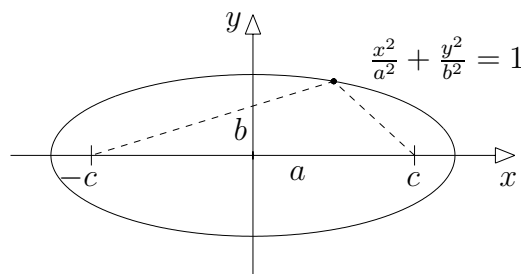
Ellipsi

Ellipsi voidaan määritellä käyränä, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Niiden kahdesta kiinteästä pisteestä (*polttopisteistä*) mitattujen etäisyyksien summa on vakio.

Jos polttopisteiksi valitaan xy-tason pisteet $(c, 0)$ ja $(-c, 0)$ ($c \geq 0$) ja em. vakioksi $2a$ ($a > c$), saadaan ellipsin yhtälö yksinkertaiseen muotoon:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Lukua a sanotaan ellipsin *ison akselin* puolikkaaksi, luku b on *pikku akselin* puolikas.



Suhdetta $e = c/a$ kutsutaan ellipsin *eksentrisyydeksi* ja se mittaa ellipsin litistyneisyyttä. Koska $0 \leq c < a$, on $0 \leq e < 1$.

Jos $c = 0$, polttopisteet yhtyvät ja käyrästä tulee ympyrä. Eksentrisyys on tällöin $e = 0$. Jos a on kiinteä ja $c \rightarrow a$, jolloin $b \rightarrow 0$ ja $e \rightarrow 1$, niin ellipsin iso akseli säilyy muuttumattomana, mutta pikku akseli pienenee ja käyrä litistyy kohden polttopisteitä yhdistävää janaa.

Nimitys polttopiste aiheutuu siitä, että jos toisesta polttopisteestä lähtee säde, joka ellipsiin osuessaan heijastuu heijastumislain mukaisesti, niin heijastunut säde kulkee toisen polttopisteen kautta. Geometrisesti tulkittuna tämä tarkoittaa, että ellipsin pisteestä polttopisteisiin piirrettyjen janojen välisen kulman puolittaja on ellipsin normaali.

Ellipsille käytetään usein myös parametriesitystä: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

■ ellipsi (ala)

■ käyrä (taso-)

■

koordinaatisto (xy-)

■ yhtälö

■ ympyrä

■ normaali

■

parametriesitys (tasokäyrän)

■ sini

■ kosini

Toisen asteen käyrät

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ■ ympyrä, ■ toisen asteen pinnat

3/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

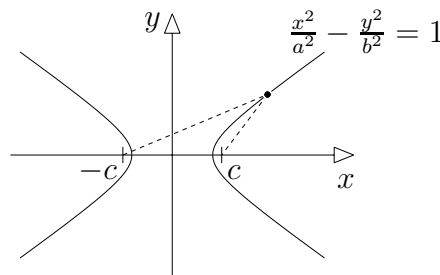
Hyperbeli

Hyperbeli määritellään samaan tapaan kuin ellipsi. Kyseessä on käyrä, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Niiden kahdesta kiinteästä pisteestä (*polttopisteistä*) mitattujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on vakio.

Kun polttopisteiksi valitaan xy -tason pisteet $(c, 0)$ ja $(-c, 0)$ ($c \geq 0$) ja vakioksi $2a$ ($0 < a < c$), saadaan hyperbelille yhtälö

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Lukuja a ja b sanotaan hyperbelin *puoliakseleiksi*.



Jos $a = b$, sanotaan, että hyperbeli on *tasasivuinen*.

Suhde $e = c/a$ on hyperbelin *eksentrisyys*. Koska $c > a$, on $e > 1$.

Hyperbelillä on monia samantyyppisiä geometrisia ominaisuuksia kuin ellipsillä. Esimerkiksi hyperbelin pisteestä polttopisteisiin piirrettyjen yhdysjanojen välisen kulman puolittaja on hyperbelin tangentti.

Hyperbelille voidaan käyttää parametriesitystä $x = \pm a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$.

■ käyrä (taso-)

■
koordinaatisto
(xy -)

■ yhtälö

■ tangentti
(suora)

■
parametriesitys
(tasokäyrän)

■ hyperbelisini

■
hyperbelikosini

Toisen asteen käyrät

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ■ ympyrä, ■ toisen asteen pinnat

4/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

Liittohyperbeli ja asymptootit

Jos hyperbelinyhtälössä

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

koordinaattien x ja y roolit vaihdetaan, jolloin hyperbelin polttopisteet $(0, c)$ ja $(0, -c)$ sijoitetaan y -akselille, ja vakioksi otetaan $2b$, saadaan alkuperäisen hyperbelin *liittohyperbeli*

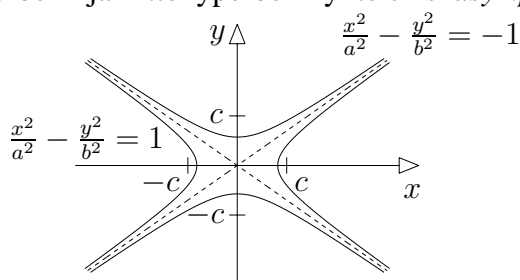
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Jos yhtälössä asetetaan oikeaksi puoleksi 0, saadaan toisen asteen yhtälö, joka esittää kahta suoraa:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{eli} \quad y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Näitä kutsutaan hyperbelin ja liittohyperbelin yhteisiksi *asymptooteiksi*.

■ asymptootti
(rationaalifunktion)



Toisen asteen käyrät

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ■ ympyrä, ■ toisen asteen pinnat

5/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

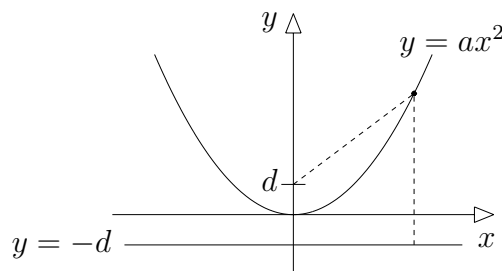
Paraabeli

Paraabeli on käyrä, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Jokaisen pisteen etäisyys kiinteästä pisteestä (*polttopisteestä*) on yhtä suuri kuin sen etäisyys kiinteästä suorasta (*johtosuorasta*).

Jos polttopiste on $(0, d)$ ja johtosuora x-akselin suuntainen suora $y = -d$, on paraabelin yhtälö xy-koordinaatistossa

$$y = ax^2, \quad \text{missä } a = \frac{1}{4d}.$$

Polttopisteen kautta kulkeva johtosuoran normaali on paraabelin *akseli*, jonka suhteen käyrä on symmetrinen. Jos paraabeli sijoitetaan koordinaatistoon edellä kuvatulla tavalla, sen akseli on y-akseli.



Heijastuessaan paraabelista akselin suuntaiset säteet kohtaavat polttopisteessä. Tämän johdosta paraabelimuotoa käytetään mm. lautasantenneissa.

Tietyssä mielessä paraabeli on ellipsin ja hyperbelin välitapaus. Tämä ei ole nähtävissä edellä käsitellyistä käyrien yhtälöistä, mutta esimerkiksi napakoordinaatit yhtälöistä (joissa (toinen) polttopiste asetetaan origoon) se ilmenee. Tämän johdosta on luontevaa sanoa, että paraabelin eksentrisyys on $= 1$.

■ käyrä (taso-)

■
koordinaatisto
(xy-)

■ yhtälö

■ normaali

■
koordinaatisto
(napa-)

Toisen asteen käyrät

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ■ ympyrä, ■ toisen asteen pinnat

6/7

■ Sisältö

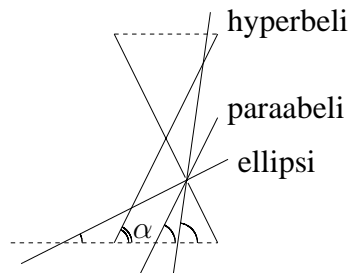
■ Hakemisto

Kartioleikkaukset

Ellipsejä, paraabeleja ja hyperbelejä kutsutaan usein yhteisellä nimellä *kartioleikkaukset*. Tämä johtuu siitä, että suoran ympyräkartion ja tason leikkauskäyrä on aina jokin näistä. Mikä on kyseessä, riippuu leikkaavan tason ja kartion sivuviivan välisestä kulmasta seuraavan kuvion osoittamalla tavalla:

■ ympyräkartio (suora)

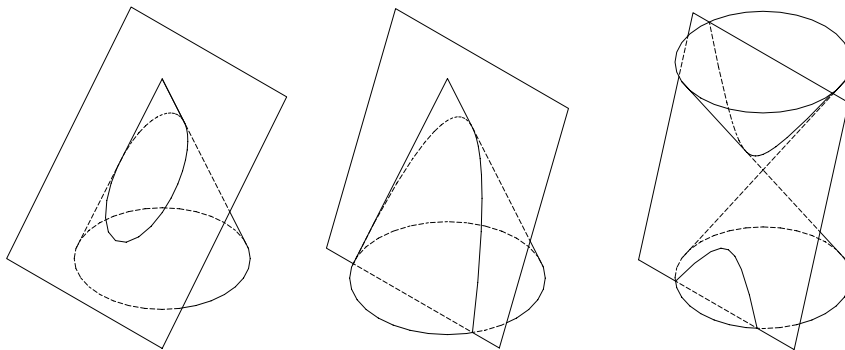
■ taso



Jos kartion sivuviivan kaltevuuskulma kartion pohjatasoon nähden on α ja leikkaavan tason kaltevuuskulma β , niin leikkauskäyrä on

ellipsi, jos $\beta < \alpha$;
paraabeli, jos $\beta = \alpha$;
hyperbeli, jos $\beta > \alpha$.

Jotta hyperbelin molemmat haarat tulisivat mukaan, on tarkasteltava kartiota kaksihaaraisena, so. kärkipisteensä suhteen symmetrisenä molempiin vastakkaisiin suuntiin avautuvana pintana.



Että leikkauskäyrät todella ovat ellipsejä, paraabeleja ja hyperbelejä, voidaan todistaa synteettisen avaruusgeometrian keinoin. Tällöin on apukonstruktion sijaittava kartion sisään kaksi *Dandelinin palloja*, paraabelitapauksessa yksi. Nämä ovat palloja, jotka sivuavat kartiopintaa pitkin ympyräviivaa ja koskettavat leikkaavaa tasoa yhdessä pisteessä, joka osoittautuu leikkauskäyrän polttopisteeksi.

■ geometria (synteettinen)

■ pallo

Toisen asteen käyrät

ESITIEDOT: ■ käyrä, ■ kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ■ ympyrä, ■ toisen asteen pinnat

7/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

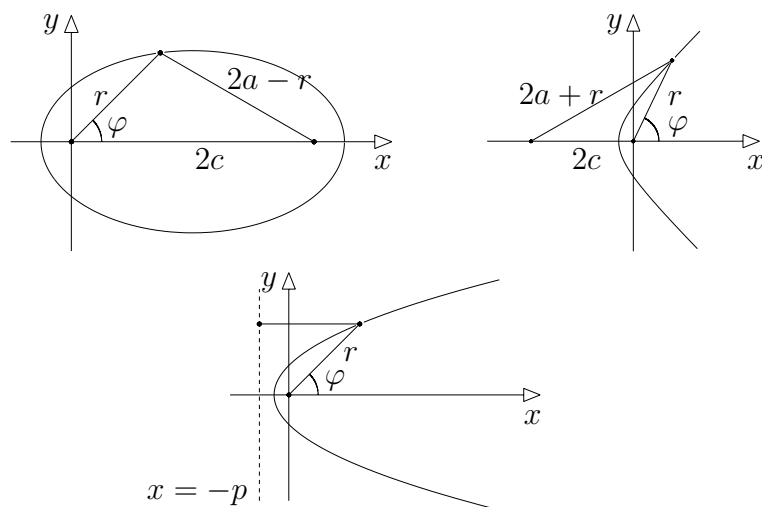
Kartioleikkausten napakoordinaattiyhtälöt

Jos (toinen) polttopiste sijoitetaan origoon, voidaan ellipsi, paraabeli ja hyperbeli esittää napakoordinaattiyhtälön avulla:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi},$$

missä p on vakio ja e eksentrisyys (vakio).

Jos $e < 1$, kyseessä on ellipsi. Jos $e > 1$, saadaan hyperbelin toinen haara. Arvo $e = 1$ antaa paraabelin.



Tässä muodossa on luontevaa käsitellä kartioleikkausten tärkeää sovellusta, planeettaliikettä. Gravitaatiolaista seuraa nimittäin, että jos tarkastellaan yhden planeetan liikettä Auringon ympärillä ottamatta huomioon muiden planeettojen aiheuttamia häiriöitä, rata on ellipsi, paraabeli tai hyperbeli, jonka polttopisteessä Aurinko on.

■
koordinaatisto
(napa-)