

## Kompleksiluvut

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ polynomien tekijöihin jako, ■ vektori

1/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Kompleksitaso

Lukukäsitteen vaiheittainen laajennus johtaa luonnollisista luvuista kokonaislukujen ja rationaalilukujen kautta reaalilukuihin. Jokaisessa vaiheessa ratkeavien yhtälöiden määrä lisääntyy: yhtälö  $x + 2 = 0$  ei ratkea luonnollisten lukujen joukossa, mutta kylläkin kokonaislukujoukossa; yhtälöllä  $3x = 2$  ei ole kokonaislukuratkaisua, mutta rationaalinen ratkaisu sillä on; yhtälön  $x^2 - 2 = 0$  ratkeavuus edellyttää rationaalilukujoukon laajentamista reaalilukujoukoksi.

Jokaisessa vaiheessa uusi lukujoukko on edellisen laajennus: edeltäjä on uuden joukon osajoukko.

Prosessia voidaan jatkaa. Yhtälöllä  $x^2 + 1 = 0$  ei ole ratkaisua reaalilukujoukossa, mutta laajentamalla reaalilukujoukko edelleen kompleksilukujen joukoksi tällekin yhtälölle (ja samalla kaikille polynomiyhtälöille) löydetään ratkaisu.

Formaalisti laskemalla yhtälön ratkaisuksi saataisiin  $x = \pm\sqrt{-1}$ . Ongelmaksi tällöin jää, mitä itse asiassa tarkoittaa  $\sqrt{-1}$ , jolle käytetään myös merkintää  $i$ . Vaikka tarkastelua voitaisiin tältäkin pohjalta jatkaa, saattaa olla luonnollisempaa suorittaa laajennus geometrisesti:

Lukusuora  $\mathbb{R}$  sijoitetaan xy-tason x-akseliksi ja koko xy-tasoa aletaan kutsua *kompleksitasoksi*. Sen pisteet  $(x, y)$  ovat *kompleksilukuja*. Näiden muodostama joukko — siis itse asiassa xy-taso — on *kompleksilukujen joukko*, symbolina  $\mathbb{C}$ .

Reaaliluvut ovat x-akselilla olevia pisteitä, so. muotoa  $(x, 0)$ . Muut pisteet ovat *imaginaarilukuja*. Tilanne on siten samankaltainen kuin aikaisemmin: edeltävä lukujoukko on uuden osajoukko.

Näkemys kompleksiluvuista xy-tason pisteinä on peräisin 1700- ja 1800-lukujen vaihteen ajalta. Kompleksilukujen historian voidaan kuitenkin katsoa alkavan lähes kolme sataa vuotta aikaisemmin polynomiyhtälöiden ratkaisujen tutkimisesta.

■ luonnollinen luku

■ kokonaisluku

■ rationaaliluku

■ reaaliluku

■ yhtälö

■ yhtälö (polynomi-)

■ osajoukko

■ yhtälö (polynomi-)

■ lukusuora

■ koordinaatisto (xy-)

## Kompleksiluvut

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ polynomien tekijöihin jako, ■ vektori

2/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

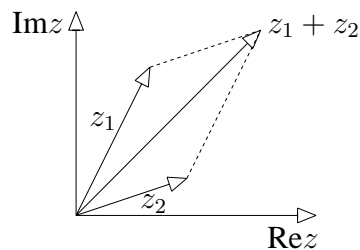
### Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku

Kompleksilukujoukko muodostuu kompleksiluvuista  $(x, y)$ , ts.  $xy$ -tason pisteistä. *Reaaliakselin* —  $x$ -akselin — yksikköpiste on  $(1, 0)$ ; tämä vastaa reaalilukua 1, ts.  $1 = (1, 0)$ . Vastaavalla tavalla merkitään *imaginaariakselin*,  $y$ -akselin yksikköä eli *imaginaariyksikköä*  $i = (0, 1)$ .

Kompleksiluvuille halutaan tavanomainen algebra — laskutoimitukset — jolloin on määriteltävä, miten niitä lasketaan yhteen, vähennetään, kerrotaan ja jaetaan keskenään. Tavoitteena on lisäksi, että tavanomaiset laskusäännöt ovat voimassa ja että  $i^2 = -1$ , jolloin ainakin yhtälölle  $x^2 + 1 = 0$  on ratkaisu olemassa.

*Yhteenlasku* on luonnollista määritellä vektori yhteenlaskuna:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$



*Vähennyslaskun* määrittely tehdään samaan tapaan:

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Yhteenlaskun määrittelyn jälkeen on luonnollista kirjoittaa vektorialgebran tapaan  $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi$ , jolloin on saatu kompleksiluvulle uusi esitysmuoto  $x + yi$ .

■  
koordinaatisto  
( $xy$ -)  
■ reaaliluku

■ yhteenlasku  
(vektorien)

## Kompleksilukujen kertolasku

Jotta laskusäännöt olisivat voimassa ja lisäksi olisi  $i^2 = -1$ , on *kertolaskun* ilmeisestikin tapahduttava seuraavasti:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

Tämä antaa perusteen asettaa kertolaskun määritelmäksi

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Tällöin on todellakin  $i^2 = -1$ :

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1.$$

Kaikki tavanomaiset algebran laskusäännöt (yhteen- ja kertolaskun vaihdannaisuus ja liitännäisyys, osittelulait) ovat voimassa, kuten määritelmiin perustuvilla mekaanisilla — tosin paikoin pitkillä — laskuilla voidaan todeta.

Myös *jakolasku* tulee mahdolliseksi, jos jakaja poikkeaa nolasta, ts. ei ole kompleksiluku  $(0, 0)$ . Murtoluvuksi kirjoitettu osamäärä on yksinkertaisesti lavennettava nimittäjän liittoluvulla. Esimerkki edempänä.

Kompleksilukuja ei määrittelyn jälkeen ole tapana merkitä lukupareina  $(x, y)$ , vaan käytetään esitysmuotoa  $x + yi$ . Yhteen-, vähennys- ja kertolaskut kompleksilukualgebrassa suoritetaan tällöin tavanomaisilla algebran laskusäännöillä. Tarvittaessa käytetään sieventämiseen yhtälöä  $i^2 = -1$ .

Kaikilta osin ei kompleksiluvuilla laskeminen kuitenkaan suju samoin kuin reaalialueella. Esimerkiksi juurenotossa on oltava varovainen. Mm. neliöjuuren positiivista haaraa ei voida määritellä. Yritys kirjoittaa  $i = +\sqrt{-1}$  johtaa ristiriitaan:

$$-1 = i^2 = (+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = +\sqrt{(-1)(-1)} = +\sqrt{1} = +1.$$

■ laskulaki  
(summa ja tulo)

■  
vaihdannaisuus

■ liitännäisyys

■ osittelulaki

■ laventaminen

■ nimittäjä

■ juuri  
(murtopotenssi)

■ juurifunktio

■ neliöjuuri

## Kompleksiluvut

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ polynomien tekijöihin jako, ■ vektori

4/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

---

### Liittoluku; kompleksilukujen jakolasku

Kompleksiluvun  $z = x + yi$  *reaaliosa* on  $x$  ja *imaginaariosa*  $y$ . Luvun *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* on  $\bar{z} = x - yi$ . Kompleksiluvun  $z$  *itseisarvo* on  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Kompleksilukujen *jakolasku* perustuu jakajan liittoluvulla laventamiseen. Esi-

■ laventaminen

$$\frac{2 + 3i}{3 + 4i} = \frac{(2 + 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{18 + i}{25} = \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i.$$

Jakolasku onnistuu aina, kun jakaja poikkeaa nolasta. Jos nimittäin jakajana on  $a + bi$ , tulee nimittäjästä liittoluvulla laventamisen jälkeen  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ , mikä on  $= 0$  vain, jos  $a = b = 0$ .

## Kompleksiluvut

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ polynomien tekijöihin jako, ■ vektori

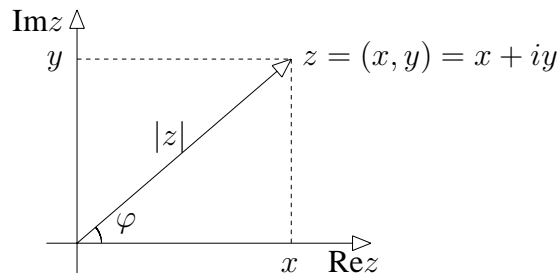
5/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Kompleksiluvun napakulma

Kompleksiluvun  $z = x + iy$  *napakulma* eli *argumentti*  $\varphi$  on pisteen  $(x, y)$  suuntakulma positiiviseen x-akseliin nähden; tämä valitaan yleensä väliltä  $]-\pi, \pi]$ .



■ suuntakulma (suoran)

■ väli (reaaliakselin)

Koska napakoordinaateille pätee trigonometristen funktioiden määritelmien mukaan  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , missä  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ , saadaan kompleksiluvulle *napakoordinaattiesitys*

$$z = x + yi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

■ napakoordinaatit (tason)

■ trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

Tämän avulla voidaan myös kompleksilukujen kertolasku luonnehtia geometrisesti:

Olkoon kerrottavana kompleksiluvut

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Näiden tulo on

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &\quad + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

missä on käytetty sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoja. Tulos on muodoltaan napakoordinaattiesitys, jolloin voidaan päätellä, että lukujen tulo on kompleksiluku, jonka itseisarvo saadaan tekijöiden itseisarvojen tulona ja napakulma tekijöiden napakulmien summana.

■ trigonometria (peruskaavat)

## Kompleksiluvut

ESITIEDOT: ■ reaaliluvut

KATSO MYÖS: ■ polynomien tekijöihin jako, ■ vektori

6/6

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Kiertotekijä; Eulerin kaava

*Kiertotekijäksi* kutsutaan kompleksilukua  $u$ , jonka itseisarvo on  $|u| = 1$ . Tämän napakoordinaattiesitys voidaan kirjoittaa muotoon  $u = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Kiertotekijän ja kompleksiluvun  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  tulo on

■ sini

■ kosini

$$uz = |z| [\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)].$$

Tämän itseisarvo on sama kuin luvun  $z$ , mutta napakulma on kasvanut kulmalla  $\alpha$ . Kiertotekijällä kertominen kiertää siis lukua  $z$  kulman  $\alpha$  verran origon ympäri positiiviseen suuntaan.

Kiertotekijää merkitään myös  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Tämä tunnetaan *Eulerin kaavana* syntyään sveitsiläisen matemaatikon Leonhard Eulerin mukaan. Asettamalla  $\alpha = \pi$  saadaan kaavasta tulos  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , joka kytkee toisiinsa Neperin luvun  $e$ , ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen luvun  $\pi$ , imaginaariyksikön  $i$ , reaaliakselin yksikön 1 ja nollan.

■ Euler

■ Neperin luku

■ pii

■ eksponenttifunktio

Oleellinen kysymys on luonnollisesti, miten eksponenttifunktio ja siis  $e^{i\alpha}$  itse asiassa määritellään kompleksialueella. Kyseessä on *kompleksianalyysiksi* tai *funktioteoriaksi* kutsuttu sangen laaja matematiikan osa-alue, jonka kehitys alkoi 1700-luvulla lähinnä Leonhard Eulerin (1707 – 1783) töistä. Alan kehitykseen vaikuttaneita merkittäviä matemaatikkoja ovat ranskalainen Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), saksalainen Bernhard Riemann (1826 – 1866) ja ranskalainen Henri Poincaré (1854 – 1912). Ala on ollut Suomessa hyvin edustettuna 1900-luvulla: Rolf Nevanlinna (1895 – 1980), suuren osan työstään Yhdysvalloissa tehnyt Lars Ahlfors (1907 – 1996) ja Helsingin yliopiston professori Olli Lehto (1925 –).

■ Cauchy

■ Riemann

■ Poincaré

■ Nevanlinna