

Kokonaislukupotenssit

Olkoon tavoitteena määritellä *potenssi* x^α , missä *kantaluku* x ja *eksponentti* α ovat mitä tahansa reaalilukuja.

■ reaaliluku

Määrittely tapahtuu useassa vaiheessa eikä tavoitteeseen täydelleen päästä: kantalukua x joudutaan jossakin määrin rajoittamaan.

1) Olkoon aluksi eksponentti luonnollinen luku n , ts. n on kokonaisluku ja ≥ 1 . Tällöin asetetaan

■ luonnollinen luku

■ kokonaisluku

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ kpl}}.$$

Kantaluku x voi olla mikä tahansa reaaliluku. Selvästikin on voimassa kertolaskusääntö $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ ja potenssiinkorotussääntö $(x^n)^m = x^{nm}$.

2) Jos eksponentti on negatiivinen, määritellään

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Tällöin tulee luonnollisesti olla $x \neq 0$.

Motiivina määrittelyssä on halu säilyttää em. potenssien kertolaskusääntö voimassa: Onhan nimittäin elementaarien supistussääntöjen mukaisesti esimerkiksi $x^5/x^3 = x^2$, $x^3/x^5 = 1/x^2$ ja nämä voidaan eo. määrittelyn turvin kirjoittaa $x^5 \cdot x^{-3} = x^2$, $x^3 \cdot x^{-5} = x^{-2}$, jolloin laskusääntö säilyy voimassa.

■ supistaminen

3) Jos on $n = 0$, määritellään

$$x^0 = 1.$$

Motiivina on triviaali yhtälö $x^n/x^n = 1$, jonka vasen puoli kohdan 2 mukaan laskien saa muodon $x^{n-n} = x^0$. Jotta murtolauseke x^n/x^n ei saisi epämääräistä muotoa $0/0$, on oletettava $x \neq 0$.

Potenssi on siis saatu määritellyksi kaikille kokonaislukueksponenteille.

Murtopotenssit

4) Murtopotenssin $x^{1/n}$ (missä n on luonnollinen luku) tulisi toteuttaa ehto $(x^{1/n})^n = x$, mikäli halutaan, että potenssin potenssiinkorottamista koskeva laskulaki on kaikissa tapauksissa voimassa. $x^{1/n}$ on siis luku, joka korotettuna potenssiin n antaa kantaluvun x ; tätä kutsutaan n :nneksi juureksi luvusta x . Luvun n :s juuri ei kuitenkaan ole aina (reaalisena) olemassa eikä yksikäsitteinen, jos se on olemassa. Potenssi $x^{1/n}$ määritellään juurifunktion päähaaran mukaisesti:

■ luonnollinen luku

■ juurifunktio

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

Tämä edellyttää, että $x \geq 0$. Potenssin arvo on myös ≥ 0 .

Jos n on pariton, voitaisiin sallia, että x voi olla negatiivinen. Näin ei kuitenkaan yleensä tehdä; ks. juurifunktion käsittelyä.

5) Jotta potenssin potenssiinkorottamista koskeva sääntö säilyisi voimassa, on ilmeisestikin asetettava

$$x^{p/n} = (x^p)^{1/n} = \sqrt[n]{x^p},$$

kun eksponentti on positiivinen rationaaliluku p/n .

■ rationaaliluku

Tällöin on edellytettävä, että $x \geq 0$. Jos nimittäin $x < 0$, voidaan ajautua ristiriitoihin: $-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$.

6) Jos eksponentti on negatiivinen rationaaliluku, menetellään samaan tapaan kuin edellä kohdassa 2:

$$x^{-p/n} = \frac{1}{x^{p/n}}.$$

Rajoituksena on $x > 0$.

Potenssi on täten saatu määriteltyksi kaikille rationaalisille eksponenteille.

Potenssi

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ juuret, ■ reaalfunktiot, ■ kompleksiluvut

3/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Irrationaalinen potenssi

7) Jos eksponentti α on irrationaaliluku, sitä voidaan approksimoida miten tarkasti tahansa rationaaliluvuilla: On olemassa rationaaliluvut r_n siten, että $|r_n - \alpha| < 10^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Jos $x > 0$, voidaan näitä vastaavat potenssit x^{r_n} edellä esitetyn määrittelyn mukaan muodostaa ja asettaa yleiseksi potenssin määritelmäksi

$$x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n},$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

Voidaan osoittaa, että raja-arvo todellakin on aina olemassa, mutta tällöin ollaan tekemisissä reaalityyppien määrittelyn peruskysymysten kanssa eikä todistus siten ole aivan helppo.

Lopputuloksena on, että potenssi x^α on saatu määritellyksi kaikille reaalityypille α ainakin, jos $x > 0$.

■

irrationaaliluku

■ rationaaliluku

■ tiheys (rationaalilukujen)

■ raja-arvo
(lukujonon)

■ reaalityyppi

Negatiivisten ja kompleksilukujen potenssit

Potenssin määritelmä voidaan yleistää myös negatiivisille luvuille ja kompleksiluvuille. Monet matemaattiset tietokoneohjelmat esimerkiksi antavat seuraavanlaisia tuloksia:

$$\begin{aligned}(-1)^{1/3} &\approx 0.5000 + 0.8660i, \\ (-1)^\pi &\approx -0.9027 - 0.4303i, \\ i^i &\approx 0.2079,\end{aligned}$$

missä i tarkoittaa imaginaariyksikköä.

Näiden tarkat arvot ovat

$$\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad \cos(\pi^2) + i \sin(\pi^2), \quad e^{-\pi/2}.$$

Määrittelyn perustana on Eulerin kaava ja potenssiinkorotussäännön säilyminen:

■ Eulerin kaava

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^\alpha = (e^{i\varphi})^\alpha = e^{i\alpha\varphi} = \cos(\alpha\varphi) + i \sin(\alpha\varphi).$$

Tällöin on esimerkiksi

$$(-1)^{1/3} = (e^{i\pi})^{1/3} = e^{i\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

Huomattakoon, että arvo $(-1)^{1/3} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ on itse asiassa ristiriidassa reaalialueelle luonnollisemman määrittelyn kanssa: $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Kompleksilukujen murto- ja irrationaalipotenssit eivät ole aivan ongelmattomia; varomaton laskeminen voi johtaa ristiriitoihin. Potenssiinkorotussääntökään ei ole rajoituksitta voimassa. Esimerkiksi laskussa

■ sini

■ kosini

$$i^i = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$$

voitaisiin myös kirjoittaa $i = \cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}$, mikä johtaisi eri tulokseen!