

## Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

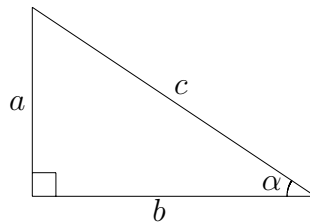
KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat, ■ kolmio, ■ kulma

1/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Trigonometriset funktiot suorakulmaisessa kolmiossa



Olkoon  $\alpha$  suorakulmaisen kolmion terävä kulma,  $a$  tämän vastainen kateetti,  $b$  viereinen kateetti ja  $c$  kolmion hypotenuusa. Kulman  $\alpha$  *trigonometriset funktiot* määritellään seuraavina sivujen suhteina:

sini: vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan eli  $\sin \alpha = a/c$ ;

kosini: viereisen kateetin suhde hypotenuusaan eli  $\cos \alpha = b/c$ ;

tangentti: vastaisen kateetin suhde viereiseen eli  $\tan \alpha = a/b$ ;

kotangentti: viereisen kateetin suhde vastaiseen eli  $\cot \alpha = b/a$ .

■ kolmio

■ kulma  
(terävä)

■ kateetti

■ hypotenuusa

■ funktio

Trigonometrisia funktioita on kaksi muutakin, mutta suorakulmaisen kolmion käsittelyyn riittävät edellä olevat.

Koska suorakulmaisen kolmion terävä kulma  $\alpha$  on välillä  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , antaa edellä oleva funktioiden määrittely vain tällä välillä.

Pythagoraan lauseen mukaan on  $a^2 + b^2 = c^2$ , jolloin

■ Pythagoraan  
lause

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \text{eli} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

(Yleisesti on tapana kirjoittaa  $\sin^2 \alpha$  merkityksessä  $(\sin \alpha)^2$ . Jälkimmäinen tapa saattaisi kyllä olla johdonmukaisempi.)

Jos suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on  $\alpha$ , niin toinen on  $90^\circ - \alpha$ . Edellä käytetyin merkinnöin on tällöin

$$\sin(90^\circ - \alpha) = b/c = \cos \alpha \quad \text{ja} \quad \tan(90^\circ - \alpha) = b/a = \cot \alpha$$

ts. kulman  $\alpha$  kosini on sama kuin komplementtikulman  $90^\circ - \alpha$  sini, samoin kotangentti on komplementtikulman tangentti.

■ kulma  
(komplementti-)

## Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat, ■ kolmio, ■ kulma

2/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Trigonometrysten funktioiden tärkeät arvot

Antamalla kolmion muuntua siten, että  $\alpha \rightarrow 0^\circ$  tai  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ , saadaan trigonometrisille funktioille arvot

$$\begin{aligned}\sin 0^\circ &= \cos 90^\circ = 0, \\ \sin 90^\circ &= \cos 0^\circ = 1, \\ \tan 0^\circ &= \cot 90^\circ = 0.\end{aligned}$$

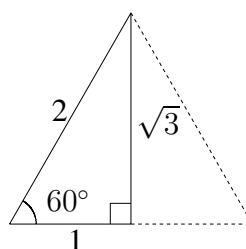
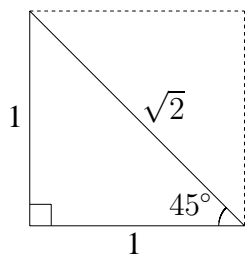
Kulmien  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ja  $60^\circ$  trigonometrysten funktioiden arvot voidaan helposti laskea neliön ja tasasivuisen kolmion avulla. Pythagoraan lauseen perusteella neliön lävistäjän pituus on  $\sqrt{2}$ , jos sivun pituus on 1. Samoin on tasasivuisen kolmion korkeusjana  $\sqrt{3}$ , jos sivun pituus on 2 ja sivun puolikas siis 1.

■ neliö

■ tasasivuinen

■ muistikolmio

■ Pythagoraan lause



## Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat, ■ kolmio, ■ kulma

3/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Trigonometrysten funktioiden yleinen määrittely

Mielivaltaisen kulman  $\alpha$  trigonometriset funktiot määritellään yksikköympyrän avulla.

Yksikköympyrä on origokeskinen ympyrä, jonka säde on  $= 1$ . Kulma  $\alpha$  sijaitsee siten, että sen kärki on origossa ja oikea kylki (alkukylki) positiivisella x-akselilla. Jos vasen kylki (loppukylki) yhtyy oikeaan kylkeen, kulman suuruus on  $= 0$ . Kulma kasvaa, kun loppukylki kiertyy positiiviseen kiertosuuntaan, so. vastapäivään. Kylki voi kiertyä useita kierroksia, jolloin saadaan miten suuria kulmia tahansa. Vastaavasti negatiiviseen suuntaan (myötäpäivään) kiertyminen merkitsee kulman pienenemistä ja negatiivisia kulmia.

Kulman  $\alpha$  suuruus mitataan yleensä radiaaneissa puhuttaessa yleisistä trigonometrisistä funktioista.

■ kulma (taso-)

■ ympyrä

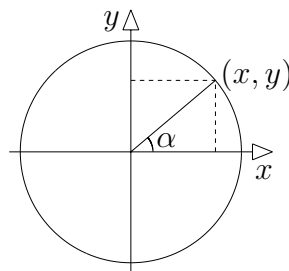
■ origo

■ origo

■ kiertosuunta (positiivinen)

■ kiertosuunta (positiivinen)

■ radiaani



Kulman  $\alpha$  kiertyvä loppukylki kohdatkoon yksikköympyrän pisteessä  $(x, y)$ . Kuuden trigonometrisen funktion määritelmät ovat tällöin seuraavat:

sini:  $\sin \alpha = y;$

kosini:  $\cos \alpha = x;$

tangentti:  $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$

kotangentti:  $\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$

sekantti:  $\sec \alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \alpha};$

kosekantti:  $\csc \alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin \alpha}.$

Jos  $\alpha$  on ensimmäisen neljänneksen kulma, so.  $x > 0$ ,  $y > 0$ , yhtyvät sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin määritelmät suorakulmaisen kolmion avulla annettuihin. Yleiset määritelmät ovat siten aiempien yleistyksiä.

Funktiot sini, kosini ja tangentti ovat yleisesti käytettyjä. Kotangentti, sekantti ja kosekantti ovat harvinaisempia, mutta varsinkin kahta viimeistä näkee melko paljon amerikkalaisissa oppikirjoissa. Myös monet matemaattiset tietokoneohjelmistot käyttävät niitä.

## Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat, ■ kolmio, ■ kulma

4/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Trigonometristen funktioiden perusominaisuudet

Koska yksikköympyrän yhtälö on  $x^2 + y^2 = 1$ , on ilmeisestikin kaikilla kulmilla  $\alpha$  voimassa

■ yhtälö

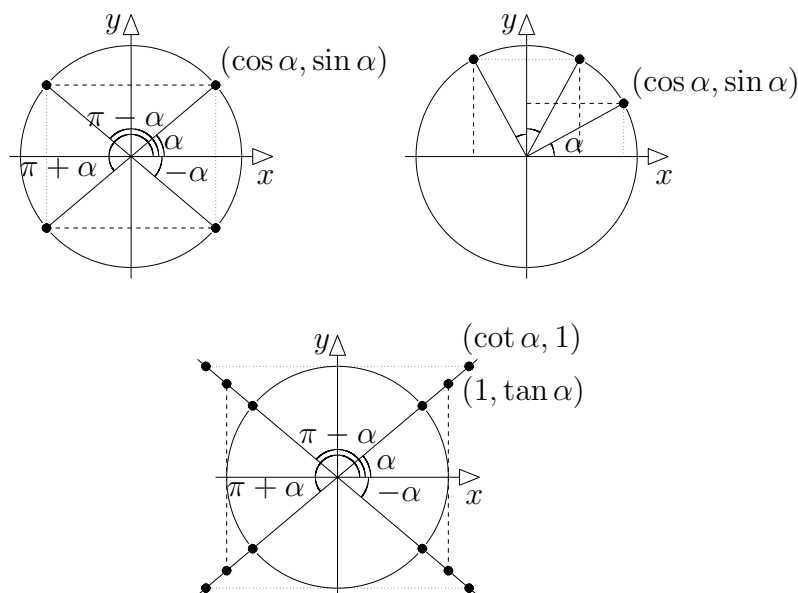
■ kulma (taso-)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Määritelmien perusteella on ilmeistä, että trigonometristen funktioiden arvojen välillä vallitsee yksinkertaisia yhteyksiä; tärkeimmät ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha; & \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha; & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha; \\ \sin(\pi/2 - \alpha) &= \cos \alpha; & \cos(\pi/2 - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha; \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha; \\ \tan(\pi/2 - \alpha) &= \cot \alpha; & \cot(\pi/2 - \alpha) &= \tan \alpha. \end{aligned}$$

Näiden hahmottaminen on yksinkertaisinta ajattelemalla tilannetta yksikköympyrässä. Ulkoa opiskeluun tuskin on aihetta.



Sini, tangenti, kotangenti ja kosekanti ovat parittomia funktioita, kosini ja sekanti parillisia. Kaikki trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, jaksona  $2\pi$ . Tangentilla ja kotangentilla on lyhyempikin jakso, nimittäin  $\pi$ .

■ pariton (funktio)

■ parillinen (funktio)

■ jaksollinen (funktio)

■ pii

## Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat, ■ kolmio, ■ kulma

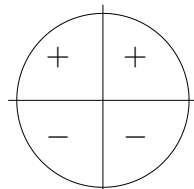
5/7

■ Sisältö

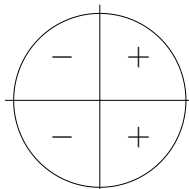
■ Hakemisto

### Trigonometrysten funktioiden merkkikaaviot

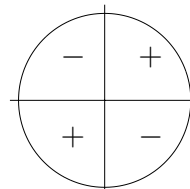
Trigonometriset funktiot saavat seuraavat merkit yksikköympyrän eri neljänneksissä:



sini  
kosekanti



kosini  
sekantti



tangentti  
kotangentti

## Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat, ■ kolmio, ■ kulma

6/7

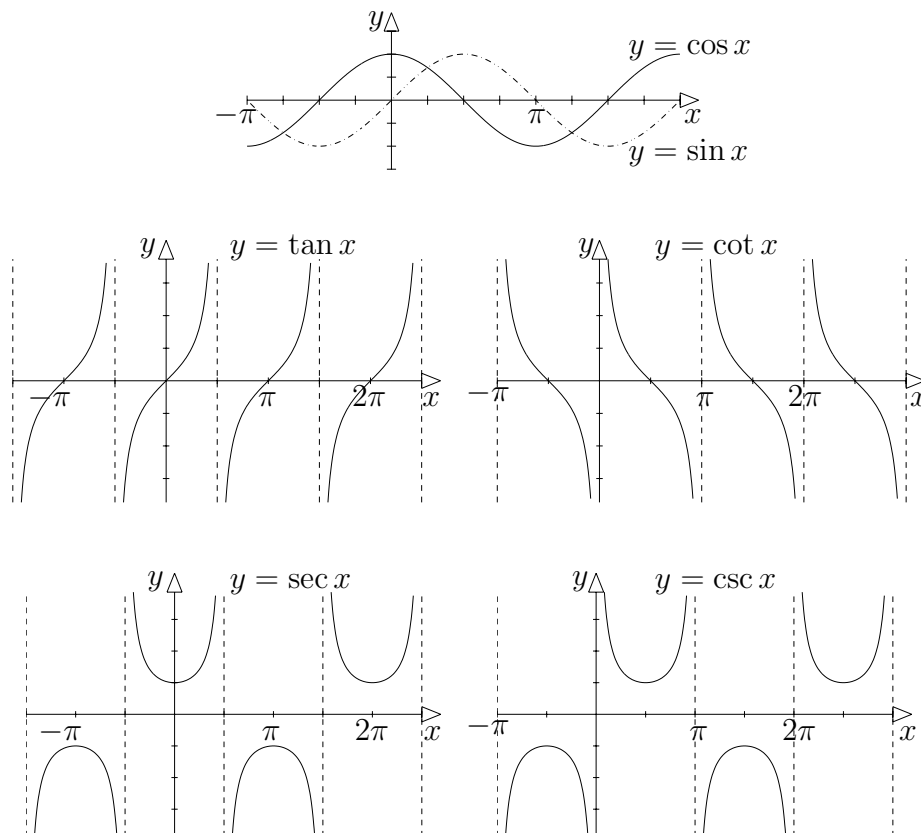
■ Sisältö

■ Hakemisto

### Trigonometrysten funktioiden kuvaajat

Trigonometrysten funktioiden kuvaajat näyttävät seuraavilta:

■ kuvaaja



Sini ja kosini ovat määriteltyjä kaikilla argumentin  $x$  reaaliarvoilla. Muut funktiot ovat määriteltyjä muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Funktioiden lähtöjoukot ovat siten seuraavat:

■ lähtöjoukko

$$\begin{array}{ll} \sin x, & x \in \mathbb{R}; \\ \tan x, & x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \\ \sec x, & x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \cos x, & x \in \mathbb{R}; \\ \cot x, & x \neq n\pi; \\ \csc x, & x \neq n\pi. \end{array}$$

Funktioiden sini ja kosini arvot ovat välillä  $[-1, 1]$ , tangentti ja kotangentti saavat kaikki reaaliarvot, sekantin ja kosekantin arvot ovat itseisarvoltaan  $\geq 1$ .

■ väli  
(reaaliakselin)

■ itseisarvo  
(reaaliluvun)

## Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot

KATSO MYÖS: ■ trigonometrian kaavat, ■ kolmio, ■ kulma

7/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Trigonometrysten funktioiden historiaa

Trigonometrian ja trigonometrysten kaavojen — funktioita sitovina algebrallisina yhtälöinä — merkittävä kehitys ajoittuu 1500-luvulle. Huomattavana nimenä kannattaa mainita ranskalainen lakimies François Viète, latinalaisittain Franciscus Vieta, jonka harrastuksena oli matematiikka ja joka saavutti moniakin merkittäviä tuloksia.

■ trigonometria

■ algebra

■ Viète

Trigonometrian historia sinänsä ulottuu paljon kauemmas. Nimitys tarkoittaa kolmioiden kulmien mittaamista, jolla on ollut käyttönsä maanmittauksessa ja tähtitieteessä vanhalta ajalta lähtien. Trigonometrisina pidettäviä tarkasteluja, joskin ulkonäöltään meidän trigonometriastamme täysin poikkeavia, on jo Ptolemaioksen kirjoituksissa 100-luvulla jKr. Länsimaisen trigonometrian ensimmäinen merkittävä nimi on Königsbergissä (nykyään Kaliningrad) syntynyt ja Keski-Euroopassa vaikuttanut Johannes Regiomontanus 1400-luvulla.

■ Ptolemaios

■  
Regiomontanus

Trigonometrysten funktioiden teoria kompleksialueelle ulotettuna (mitä tässä ei käsitellä) on peräisin 1700-luvulta. Kehittäjiä ovat ranskalainen Abraham de Moivre ja ennen muuta sveitsiläissyntyinen monissa Euroopan maissa työskennellyt Leonhard Euler.

■ Euler