

Summan, vakiokerrannaisen, tulon ja osamäärän derivaatta

Summan derivaatta lasketaan termeittäin:

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

Vakiokerrannaisen derivaatta: Jos c on vakio, se voidaan siirtää derivointiopeeraattoriin D eteen:

$$D[cf(x)] = cf'(x).$$

Tulon derivaatta: 'Edellisen tekijän derivaatta kertaa jälkimmäinen plus edellinen kertaa jälkimmäisen derivaatta':

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Useamman tekijän tuloihin tämä yleistyy seuraavaan tapaan:

$$D[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Osamäärän derivaatta: 'Osoittajan derivaatta kertaa nimittäjä miinus osoittaja kertaa nimittäjän derivaatta per nimittäjä toiseen':

$$D[f(x)/g(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Kaikki säännöt voidaan johtaa suoraan derivaatan määritelmän pohjalta erotus-osamäärän raja-arvona.

■ derivaatta
■ erotusosamäärä
■ raja-arvo (funktion)

Derivointisäännöt

ESITIEDOT: ■ derivaatta

KATSO MYÖS: ■ alkeisfunktioiden derivaatat

2/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

Yhdistetyn funktion derivaatta

Yhdistetyn funktion derivoimissääntö tunnetaan myös *ketjusäännön* nimellä: 'Ulkofunktion derivaatta kertaa sisäfunktion derivaatta':

■ yhdistetty
funktio

$$D[f(g(x))] = f'(g(x)) g'(x).$$

Yleistys useampiin sisäkkäisiin funktioihin:

$$D[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x).$$

Esimerkiksi lausekkeen $\sin((x^2 + 1)^7)$ voidaan katsoa muodostuvan kolmesta sisäkkäisestä funktiosta: uloin on sinifunktio, tämän sisällä on seitsemänteen potenssiin korottaminen ja sisimpänä funktio $x^2 + 1$; siis $f(z) = \sin z$, $g(y) = y^7$, $h(x) = x^2 + 1$. Derivaatta on tällöin

$$\begin{aligned} \cos(g(h(x))) \cdot 7h(x)^6 \cdot 2x &= \cos((x^2 + 1)^7) 7(x^2 + 1)^6 2x \\ &= 14x(x^2 + 1)^6 \cos((x^2 + 1)^7). \end{aligned}$$

Myös ketjusääntö voidaan johtaa suoraan derivaatan määritelmän pohjalta erotusosamäärän raja-arvona.

■ derivaatta
■ erotusosa-
määrä
■ raja-arvo
(funktion)

Käänteisfunktion derivointi

Jos funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita, on $g(f(x)) = x$. Mikäli kumpikin funktio on derivoituva, voidaan yhtälö derivoida puolittain yhdistetyn funktion derivoimissääntöä käyttäen, jolloin saadaan $g'(f(x))f'(x) = 1$ eli

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Funktion f derivaatta on siis saatu lausutuksi käänteisfunktion g derivaatan avulla. Kaava kirjoitetaan usein muotoon $f'(x) = 1/g'(y)$, jolloin on merkitty $y = f(x)$.

Tulos on käyttökelpoinen monien alkeisfunktioiden derivaattojen johtamisessa sekä lisäksi tapauksissa, missä käänteisfunktion lauseketta ei voida lausua alkeisfunktioiden avulla.

Esimerkiksi funktiolla

$$g(x) = \frac{x^5}{1+x^2}$$

on käänteisfunktio f , mutta tätä ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla. Koska $g(2) = \frac{32}{5}$, on $f(\frac{32}{5}) = 2$. Käänteisfunktion derivoimiskaavan mukaisesti on tällöin

$$f'(\frac{32}{5}) = \frac{1}{g'(2)} = \frac{25}{272}.$$

■
käänteisfunktio
■
käänteisfunktio
■ derivoituvuus

■ derivointi (al-
keisfunktioiden)
■ alkeisfunktio

Implisiittinen derivointi

Implisiittinen derivointi on yhdistetyn funktion derivoimisäännön sovellus tapaukseen, missä funktiota ei ole annettu suoraan, vaan se tunnetaan yhtälönä, jonka argumentin arvot x ja funktion arvot y toteuttavat, esimerkiksi $x^4 + y^4 = 2xy^5$. Jos löytyy pisteitä (x, y) , jotka toteuttavat yhtälön, voidaan periaatteessa ratkaista y muuttujan x funktiona: $y = y(x)$. Käytännössä ei välttämättä ole helppoa tai edes mahdollista löytää tälle funktiolle yksinkertaista lauseketta.

■ yhdistetty
funktio

■ yhtälö

Jos funktio $y(x)$ on olemassa, se toteuttaa siis yhtälön

$$x^4 + y(x)^4 = 2xy(x)^5.$$

Jos voidaan olettaa, että funktio y on derivoituva, derivoidaan em. yhtälön molemmat puolet muuttujan x suhteen mm. yhdistetyn funktion derivoimisääntöä käyttäen:

■ derivoituvuus

$$4x^3 + 4y(x)^3y'(x) = 2y(x)^5 + 10xy(x)^4y'(x).$$

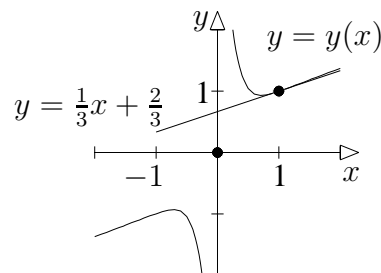
Tästä voidaan ratkaista $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{4x^3 - 2y(x)^5}{10xy(x)^4 - 4y(x)^3} = \frac{4x^3 - 2y^5}{10xy^4 - 4y^3}.$$

Tulos sisältää kuitenkin edelleen tuntemattoman lausekkeen $y(x)$. Jos kuitenkin tiedetään arvopari (x, y) , joka toteuttaa alkuperäisen yhtälön, saadaan funktion derivaatta tässä pisteessä. Esimerkitapauksessa piste $(1, 1)$ on käyrällä, jolloin siis $y(1) = 1$. Vastaava derivaatta on

■ käyrä (taso-)

$$y'(1) = \frac{4 - 2}{10 - 4} = \frac{1}{3}.$$



Funktion y derivoituvuus ei aina ole itsestään selvää. Esimerkiksi eo. yhtälö toteutuu myös origossa, jolloin siis on $y(0) = 0$. Tämä on kuitenkin funktion epäjatkuvuuspiste eikä derivaattakaan voi tällöin olla olemassa.