

## Joukon käsite

Matemaattisen päättelyn (todistamisen) pohjana pidetään usein formaalin logiikan ohella *joukko-oppia*. Vaikka näkemystä voidaankin kritisoida eikä joukko-oppi ole lähtökohtana ongelmaton eikä aina tarpeellinenkaan, on peruskäsitteiden tuntemus kuitenkin välttämätöntä.

*Joukko* on jonkinlainen kokoelma tarkasteltavana olevan *perusjoukon* objekteja eli *alkioita*.

Tyypillisiä perusjoukkoja ovat reaalilukujoukko  $\mathbb{R}$ , kompleksilukujoukko  $\mathbb{C}$  tai vaikkapa reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  joukko.

Perusjoukossa  $\mathbb{R}$  voidaan muodostaa esimerkiksi joukko, joka koostuu positiivisista reaaliluvuista. Jos tälle käytetään nimeä  $\mathbb{R}_+$ , merkitään  $2 \in \mathbb{R}_+$  ja  $-2 \notin \mathbb{R}_+$  osoittamaan, että luku 2 *kuuluu* joukkoon ja luku  $-2$  *ei kuulu*; vaihtoehtoisesti voidaan sanoa, että 2 *on alkiona* ko. joukossa, tms.

Joukkoja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla ja niiden määrittelyssä käytetään aaltosulkumerkintää seuraavaan tapaan:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}.$$

Pystyviivan vasemmalla puolella osoitetaan, että perusjoukkona on reaaliluvut  $\mathbb{R}$ . Oikealla puolella on joukon alkioilta vaadittava ehto. Esimerkin joukkoon  $A$  siis kuuluvat reaaliluvut, jotka ovat  $> \sqrt{2}$  tai  $< -\sqrt{2}$ . Jos asiayhteydestä on selvää, mistä perusjoukosta on kyse, merkitään lyhyemmin:  $\{x \mid x^2 > 2\}$ .

Jos joukossa on äärellisen monta alkioita, se voidaan antaa luettelemalla alkiot. Esimerkiksi  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  on neljän alkion (luvun) muodostama joukko.

Joukko voi luonnollisesti käsittää kaikki perusjoukon alkiot. Toisaalta puhutaan myös *tyhjästä joukosta*, jossa ei ole ainuttakaan alkioita. Tätä merkitään symbolilla  $\emptyset$ . Esimerkiksi  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$ ,  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = \emptyset$ .

Muita esimerkkejä joukkomerkinän käytöstä ovat kompleksitason origokeskinen  $R$ -säteinen ympyrä  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$  ja sellaisten jatkuvien reaalifunktioiden joukko, joiden kuvaaja kulkee origon kautta:

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva, } f(0) = 0\}.$$

■ logiikka

■ reaaliluku

■

kompleksiluku

■ funktio

■ funktio  
(reaali-)

■

kompleksitaso

■ itseisarvo  
(kompleksiluvun)

■ jatkuvuus

**Osajoukko**

Joukon  $A$  sanotaan olevan joukon  $B$  *osajoukko*, merkitään  $A \subset B$ , jos jokainen joukon  $A$  alkio on myös joukon  $B$  alkio, ts. logiikan merkinnöin  $x \in A \implies x \in B$ .

■ logiikka

Merkintää  $A \subset B$  käytettäessä on myös mahdollista, että joukot  $A$  ja  $B$  ovat samat eli  $A = B$ . Jos erityisesti halutaan osoittaa, että  $A$  on *aito osajoukko*, ts. on olemassa ainakin yksi alkio  $x$  siten, että  $x \in B$  ja  $x \notin A$ , merkitään usein  $A \subsetneq B$ . Näiltä osin merkinnät eivät kuitenkaan ole täysin vakiintuneita.

Tyhjän joukon katsotaan olevan minkä tahansa joukon osajoukko:  $\emptyset \subset A$ .

Esimerkiksi: Jos joukko  $F$  muodostuu kaikista funktioista  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , joukko  $C_0$  jatkuvista ja  $C_1$  derivoituvista funktioista  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , niin  $C_1 \subset C_0 \subset F$ , koska jokainen derivoituva funktio on myös jatkuva. Kummassakin tapauksessa osajoukko on aito.

■ jatkuvuus

■ derivoituvuus

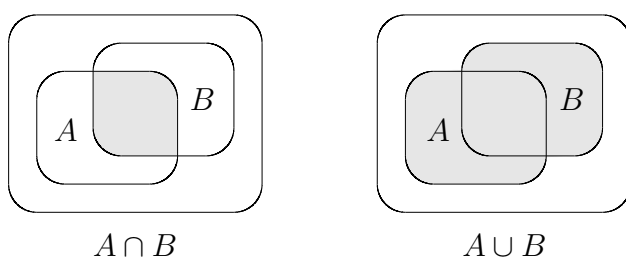
## Joukkoalgebraa

Seuraavat eri joukkojen väliset suhteet tai operaatiot edellyttävät, että puhe on saman perusjoukon joukoista.

Joukkojen  $A$  ja  $B$  *leikkaus* muodostuu niiden yhteisestä osasta:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

Tämä voi luonnollisesti olla tyhjä joukko.



Joukkojen  $A$  ja  $B$  *unioniin* kuuluvat molempien joukkojen alkiot:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

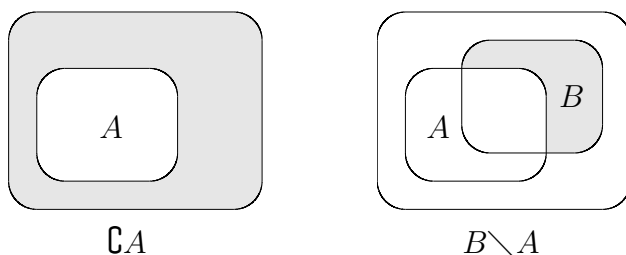
Erityisesti on siis  $A \cap B \subset A \cup B$ .

Joukon  $A$  *komplementti* (perusjoukon suhteen) muodostuu joukkoon  $A$  kuulumattomista alkioista:

$$\complement A = \{x \mid x \notin A\}.$$

Joukon  $A$  komplementti joukon  $B$  suhteen on

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ja } x \notin A\}.$$



Kuvatut operaatiot voidaan ymmärtää joukkojen välisiksi laskutoimituksiksi. Näillä on omat laskusääntönsä, esimerkiksi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B),$$

$$(A \cap \complement B) \cap (\complement C) = A \cap \complement(B \cup C).$$

Tällöin puhutaan *joukkoalgebrasta*.

Laskusääntöjen voimassaolo voidaan usein päätellä piirtämällä mahdollisimman yleistä tapausta koskeva kuvio.

## Reaalitylukujoukon välit

Reaalitylukujoukon (lukusuoran)  $\mathbb{R}$  *avoimeen väliin* kuuluvat tietyllä välillä olevat luvut ilman välin päätepisteitä; *suljettuun väliin* kuuluvat myös päätepisteet:

■ reaalityluku

■ lukusuora

$$\begin{aligned}\text{avoin väli:} \quad & ]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ \text{suljettu väli:} \quad & [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.\end{aligned}$$

Avoimen välin merkintänä käytetään joskus myös kaarisulkuja:  $(a, b) = ]a, b[$ .

Väli voi olla myös *puoliavoin*:  $[0, 1[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ .

Välin päätepisteenä käytetään toisinaan myös symbolia  $\infty$ . Esimerkiksi

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, \infty[.$$

Välimerkintä viittaa osajoukkoon, jolloin joukko-opin operaatioita voidaan kohdistaa väleihin. Esimerkiksi

$$]-2, 0[ \cup [0, 1] = ]-2, 1], \quad [1, 5] \cap [3, 10] = [3, 5].$$

Joukko-opillisten merkintöjen turhaa käyttöä on kuitenkin syytä välttää. On luontevampaa kirjoittaa 'tapauksessa  $|x| \leq 2, x \neq 0$ ' kuin ' $x \in [-2, 0[ \cup ]0, 2]$ ' tai ' $x \in \{x \mid |x| \leq 2, x \neq 0\}$ '.