

## Polynomien alkeellinen tekijöihin jako

Polynomien tekijöihin jako on usein tarvittava apukeino. Tärkeitä peruskaavoja ovat seuraavat:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y), \\x^n - y^n &= (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})\end{aligned}$$

sekä parittomilla arvoilla  $n$

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Lisäksi polynomien tekijöihin jaossa voidaan käyttää binomikaavaa (Pascalin kolmiota) tai multinomikaavaa käänteiseen suuntaan.

■ binomikaava

■ binomikaava

■ Pascalin

kolmio

■

multinomikaava

■

multinomikaava

Polynomin tekijöihin jakoa tarvitaan usein lausekkeiden sieventämisessä. Tällöin eo. kaavoja joudutaan käyttämään molempiin suuntiin. Sieventämisen tavoite ei yleensä ole itsestään selvä, vaan se riippuu yhteydestä: mitä lausekkeelle on seuraavaksi tarkoitus tehdä. Esimerkiksi ei ole selvää, kumpaa seuraavista muodoista on pidettävä sievempänä:

$$\frac{1 + x^{11}}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10}.$$

**Reaali- ja kompleksikertoiminen tekijöihin jako**

Kysymys polynomien tekijöihin jaosta ei ole aivan yksinkertainen. Tulos nimitään riippuu siitä, millaiset luvut sallitaan tekijöiden kertoimiksi.

Jos annettuna on kokonaislukukertoiminen polynomi, on yleensä luonnollista (tarvittaessa) pyrkiä jakamaan se kokonaislukukertoimisiin tekijöihin. Aina tämä ei tietenkään ole mahdollista; esimerkkinä on vaikkapa toisen asteen polynomi  $x^2 - 2x - 1$ . Jos kuitenkin sallitaan, että kertoimet saavat olla mitä tahansa reaalilukuja, tekijöihin jako onnistuu:

■ reaaliluku

$$x^2 - 2x - 1 = [x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})].$$

Reaalilukujen salliminenkaan ei aina riitä. Polynomia  $x^2 + 1$  ei voida reaalialueella jakaa tekijöihin, mutta kompleksialueella kyllä:

■  
kompleksiluku

$$(x + i)(x - i).$$

Reaalistenkaan tekijöiden löytäminen ei välttämättä ole yksinkertaista. Esimerkiksi:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Ensimmäistä astetta oleviin reaalisiin tekijöihin ei tässä päästä; kompleksiset kylä ovat olemassa.

## Polynomien tekijöihin jako

ESITIEDOT: ■ polynomit, ■ reaalityöt, ■ kompleksiluvut

KATSO MYÖS: ■ polynomiyhtälöt

3/4

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Tekijöihin jako polynomin nollakohtien avulla

Kysymys yhden muuttujan polynomin tekijöihin jaosta voidaan ratkaista polynomiyhtälöiden teorian avulla. Jos nimittäin

■ yhtälö  
(polynomi-)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

on astetta  $n$  oleva polynomi, jonka nollakohdat, so. polynomiyhtälön  $p(x) = 0$  ratkaisut ovat  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , voidaan kirjoittaa

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

jolloin polynomi on tullut jaetuksi ensimmäistä astetta oleviin tekijöihin. Menettely perustuu ns. algebran peruslauseeseen.

■ algebran  
peruslause

Jos kaikki nollakohdat ovat reaalisia, tekijöihin jako onnistuu reaaliarvoilla; jos joukossa on kompleksilukuja, jako on mahdollinen vain kompleksiarvoilla.

■ reaalityö

■ kompleksiluku

Esimerkiksi: Toisen asteen yhtälön  $x^2 - 2x - 1 = 0$  juuret ovat  $x_1 = 1 + \sqrt{2}$  ja  $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ . Nämä ovat siis polynomin  $x^2 - 2x - 1$  nollakohdat ja tekijöihin jaoksi saadaan

■ yhtälö (toisen  
asteen)

$$x^2 - 2x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = [x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})].$$

Kuudennen asteen polynomin  $x^6 + 1$  kaikki nollakohdat ovat

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, & x_2 &= i, & x_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \\ x_4 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, & x_5 &= -i, & x_6 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Tekijöihin jako kompleksiarvoilla on tällöin

$$x^6 + 1 = (x - i)(x + i)(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}),$$

mistä päästään reaaliarvojen tekijöihin kertomalla aina kaksi perättäistä tekijää keskenään:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Menettely pätee kaikille reaalityötoimisille polynomeille, koska näiden kompleksiset nollakohdat muodostavat aina liittolukupareja.

■ liittoluku

**Polynomin nollakohdat ja kertoimet**

Suorittamalla kertolaskut polynomin tekijäesityksessä päädytään toisen ja kolmannen asteen polynomien tapauksessa seuraavaan, kun oletetaan, että korkeimman potenssin kerroin on  $= 1$ :

$$\begin{aligned}p_2(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2; \\ p_3(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Vastaava lasku voidaan suorittaa korkeammankin asteen polynomeille.

Tällöin päädytään seuraaviin tuloksiin (missä edellytyksenä siis on, että korkeimman potenssin kerroin on  $= 1$ ):

- Polynomin toiseksi korkeinta astetta olevan potenssin kerroin on nollakohtien summan vastaluku.
- Polynomin vakiotermi on nollakohtien tulo sellaisenaan, jos polynomi on parillista astetta, ja tulon vastaluku, jos polynomi on paritonta astetta.

Muillekin kertoimille saadaan vastaavantyyppiset lausekkeet, mutta nämä eivät ole aivan yhtä yksinkertaisia. Kaikilla lausekkeilla on symmetriaominaisuus: Jos mitkä tahansa juuret vaihdetaan keskenään, lauseke ei muutu.