

## Juuret

ESITIEDOT: ■ potenssi

KATSO MYÖS: ■ reaalfunktiot, ■ kompleksiluvut

1/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

## Juuret

Luvun  $a$  *neliöjuureksi* kutsutaan lukua, joka toiseen potenssiin korotettuna antaa luvun  $a$ . Kyseessä on siten yhtälön  $x^2 = a$  ratkaisu.

Vastaavalla tavalla määritellään *korkeammat juuret*. Jos  $n$  on luonnollinen luku, niin  $n$ :s juuri luvusta  $a$  on luku, joka korotettuna potenssiin  $n$  antaa luvun  $a$ , ts. kyseessä on yhtälön  $x^n = a$  ratkaisu.

Tapauksessa  $n = 3$  käytetään nimitystä *kuutiojuuri*.

Edellä olevat määrittelyt merkitsevät, että juuren arvo ei (yleensä) ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi luvun 4 neliöjuuria ovat  $+2$  ja  $-2$ . Arvojen lukumäärä riippuu siitä, mistä joukosta niitä etsitään. Jos haetaan reaalisia arvoja, luvulla  $-4$  ei ole neliöjuuria lainkaan; kompleksilukujoukosta haettaessa arvoja on kaksi:  $2i$  ja  $-2i$ .

Kysymys arvojen lukumäärästä ratkeaa polynomi yhtälöiden ominaisuuksien avulla: Koska  $n$ :s juuri luvusta  $a$  on yhtälön  $x^n = a$  ratkaisu, arvoja on kompleksitasossa täsmälleen  $n$  kappaletta. Poikkeuksena on tapaus  $a = 0$ , jolloin ainoa juuri on 0. Jotkut juurista voivat olla reaalisia, mutta ainoastaan neliöjuuren tapauksessa voivat kaikki — molemmat — olla reaalisia.

Esimerkiksi kuutiojuuri luvusta  $-8$  saa reaalisen arvon  $-2$ , mutta sillä on myös kompleksiset arvot  $1 \pm i\sqrt{3}$ . Kuudennella juurella luvusta 729 on kuusi arvoa:  $\pm 3$ ,  $\frac{3}{2}(\pm 1 \pm i\sqrt{3})$ , missä jälkimmäisen lausekkeen  $\pm$ -merkit valitaan toisistaan riippumattomasti ja saadaan siis neljä eri kombinaatiota.

Lukija piirtäköön eo. juurten sijainnin kompleksitasoon. Syntyvä kuvio on yleistettävissä: Luvun  $a$   $n$ :nnen juuren kaikki arvot sijaitsevat tasavälisesti kompleksitason origokeskisellä ympyrällä.

■ potenssi  
(kokonaisluku-)

■ yhtälö

■ yhtälö  
(polynomi-)

■ luonnollinen  
luku

■ reaalityö

■ kompleksiluku

■ yhtälö  
(polynomi-)

■ kompleksitaso

## Juuret

ESITIEDOT: ■ potenssi

KATSO MYÖS: ■ reaalifunktiot, ■ kompleksiluvut

2/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Juurifunktiot

Luvun  $x$   $n$ :nlelle juurelle käytetään merkintää  $\sqrt[n]{x}$ . Luku  $x$  on *juurettava*, luku  $n$  on juuren *indeksi*.

Koska juurella kuitenkin on yleensä useita arvoja, kiinnitetään merkintä tarkoittamaan yhtä niistä. Tällöin puhutaan *juurifunktiosta* tai juuren *päähaarasta*.

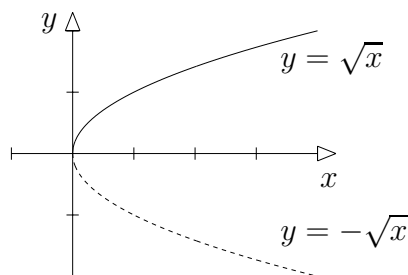
Jos juurettava  $x$  on positiivinen, on kaikilla juurilla ainakin reaalinen ja positiivinen arvo. Merkintä  $\sqrt[n]{x}$  tarkoittaa tätä. Sama asia voidaan ilmaista myös potenssifunktion avulla:  $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ .

Aina on myös  $\sqrt[n]{0} = 0$ .

Esimerkiksi (reaalinen) *neliöjuurifunktio*  $\sqrt{x}$  — lyhyemmin yleensä neliöjuuri — määritellään vain, kun  $x$  on reaalinen ja  $\geq 0$ . Kahdesta mahdollisesta neliöjuuren arvosta valitaan positiivinen, jolloin esimerkiksi  $\sqrt{16} = +4$ . Seurauksena on kaikille reaaliluvuille  $a$  laskusääntö  $\sqrt{a^2} = |a|$ , koska  $a^2$  on aina  $\geq 0$  ja juuri siis voidaan muodostaa, mutta  $a$  itse voi olla negatiivinenkin.

Neliöjuurella on myös *negatiivinen haara*, funktion ns. sivuhaara, jolloin funktion arvoksi valitaan negatiivinen vaihtoehto. Sivuhaaran mukaan laskien on reaaliluvun  $x \geq 0$  neliöjuuri  $-\sqrt{x}$ .

Laskimien ja tietokoneohjelmien neliöjuurifunktiot toimivat ainakin numeerisia arvoja laskettaessa poikkeuksetta positiivisen haaran (päähaaran) mukaisesti. Lausekkeita käsiteltäessä asia ei kaikissa tietokoneohjelmissa ole yhtä selvä, vaan saattaa jäädä käyttäjän vastuulle.



Yleisesti: Jos  $x$  on reaalinen ja  $\geq 0$ , tarkoittaa  $\sqrt[n]{x}$  sitä  $n$ :ttä juurta, joka on reaalinen ja  $\geq 0$ .

Jos  $n$  on pariton, tämä on juurifunktion ainoa (reaalinen) haara. Jos  $n$  on parillinen, juurifunktiolla on myös negatiivinen haara  $-\sqrt[n]{x}$ .

■ funktio

■ potenssi  
(murto-)

■  
potenssifunktio

■ reaaliluku

### Juurifunktion määritelmän laajennus

Juurifunktion määritelmä voidaan pyrkiä jatkamaan myös tapaukseen, missä juurrettava on negatiivinen reaalityö tai kompleksityö. Jos juuren indeksi on pariton ja juurrettava negatiivinen, on juuren kaikkien arvojen joukossa negatiivinen reaalityö. Tuntuisi luonnolliselta määritellä tämä juurifunktion arvoksi; siis esimerkiksi  $\sqrt[3]{-8} = -2$ .

■ reaalityö

■  
kompleksityö■ potenssi  
(kompleksinen)

Aina ei näin kuitenkaan tehdä, koska määrittely olisi epäjohdonmukainen laajennettaessa juurifunktiota kompleksisiin argumentteihin. Tällöin asetetaankin juuren päähaaran arvoksi se vaihtoehto, jonka napakulma on samanmerkkinen kuin juurrettavan napakulma ja mahdollisimman lähellä nollaa.

■ napakulma  
(kompleksityö)

Esimerkiksi luvun  $-8$  kuutiojuurella on kolme arvoa:  $-2$ ,  $1 + i\sqrt{3}$  ja  $1 - i\sqrt{3}$ . Koska luvun  $-8$  napakulma on  $\pi$  ja juurten napakulmat ovat  $\pi$ ,  $\pi/3$  ja  $-\pi/3$ , on näistä valittava keskimäinen:  $\sqrt[3]{-8} = 1 + i\sqrt{3}$ .

Samaan tapaan myös  $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}(1 - i)$ .