

## Algebralliset menetelmät geometriassa

1/3

ESITIEDOT: ■ polynomiyhtälöt, ■ Pythagoraan lause, ■ piste, ■ suora, ■ taso  
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemrat, ■ kolmio, ■ ympyrä, ■ pallo, ■ monikulmiot, ■ monitahokkaat

■ Sisältö  
■ Hakemisto

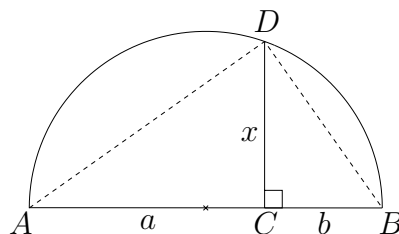
### Esimerkki 1 algebrallisista menetelmistä geometriassa

Olkoon annettuna janat, joiden pituudet ovat  $a$  ja  $b$ . Tehtävänä on geometrisesti konstruoida — harpilla ja viivoittimella — jana, jonka pituus on näiden keski-  
verto, so.  $\sqrt{ab}$ .

■ keskiverto

Asetetaan annetut janat toistensa jatkeeksi. Yhdistetty jana olkoon  $AB$ ; janoja erottava piste tämän keskellä olkoon  $C$ . Piirretään puoliympyrä, jonka halkaisijana on  $AB$ , ja pisteeseen  $C$  janan  $AB$  normaali. Tämä leikatkoon puoliympyrän pisteessä  $D$ . Janan  $CD$  pituus olkoon  $x$ .

■ ympyrä  
■ normaali



Pituus  $x$  voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Puoliympyrän sisältämänä kehäkulmana kulma  $ADB$  on suora kulma. Koska kulmien  $CAD$  ja  $CDB$  vasemmat kyljet ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, samoin oikeat, niin kulmat ovat yhtä suuret. Kolmioissa  $ACD$  ja  $DCB$  ovat lisäksi kulmat  $ACD$  ja  $DCB$  suorina kulmina yhtä suuria, ja siis kolmiot ovat yhdenmuotoiset (KK).

■ kehäkulma (esimerkki)  
■ kehäkulma (esimerkki)  
■ kehäkulma  
■ yhdenmuotoisuus (kolmioiden)

Niiden vastinsivut ovat tällöin verrannollisia, jolloin

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

mistä seuraa  $x = \sqrt{ab}$ . Jana  $CD$  on pituudeltaan siis annettujen janojen keski-  
verto.

## Algebralliset menetelmät geometriassa

2/3

ESITIEDOT: ■ polynomiyhtälöt, ■ Pythagoraan lause, ■ piste, ■ suora, ■ taso  
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemit, ■ kolmio, ■ ympyrä, ■ pallo, ■ monikulmiot, ■ monitahokkaat

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Esimerkki 2 algebrallisista menetelmistä geometriassa

Janan *kultaisella leikkauksella* tarkoitetaan sen jakamista kahteen osaan siten, että koko janan pituuden suhde isompaan osaan on sama kuin isomman osan suhde pienempään osaan. Jos janan pituus on  $a$  ja isomman osan pituus  $x$ , tulee siis olla

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}.$$

Tämä johtaa toisen asteen yhtälöön  $x^2 + ax - a^2 = 0$ , jolla on ratkaisuna

■ yhtälö (toisen asteen)

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Miinusmerkki juuren edessä ei tule kysymykseen, koska jananpituuden  $x$  tulee olla positiivinen. Tulokseksi saadaan sievennysten jälkeen

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a.$$

Pituudeltaan  $a$  olevan janan kultainen leikkaus on saadun lausekkeen perusteella myös konstruotavissa geometrisesti, so. harpilla ja viivoittimella. Tätä varten piirretään ensin suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat  $a$  ja  $a/2$ ; hypotenuusa on tällöin Pythagoraan lauseen mukaan  $\sqrt{a^2/4 + a^2}$ . Kun tästä erotetaan (harpilla) pois toinen kateetti  $a/2$ , jää jäljelle etsitty jana  $x$ . Piirrä!

■ kolmio

■ kateetti

■ hypotenuusa

Janan kultainen leikkaus (lat. *sectio aurea*), jota usein kutsutaan myös janan jakamiseksi jatkuvaan suhteeseen, oli jo Pythagoraan aikana tunnettu. Varsinkin keskiajalla kultainen leikkaus oli suuren huomion kohteena ja sitä pidettiin taiteessa perustavan tärkeänä. Esimerkiksi rakennuksen ikkuna-aukkojen sopusuhtaisuuden on katsottu vaativan sivujen pituuksien mitoittamista kultaisen leikkauksen suhteeseen.

■ Pythagoraan lause

■ Pythagoras

## Algebralliset menetelmät geometriassa

3/3

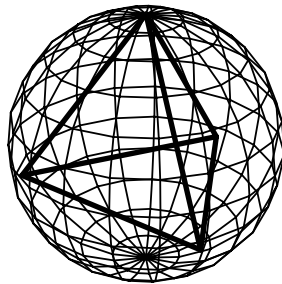
ESITIEDOT: ■ polynomi yhtälöt, ■ Pythagoraan lause, ■ piste, ■ suora, ■ taso  
KATSO MYÖS: ■ geometriset probleemit, ■ kolmio, ■ ympyrä, ■ pallo, ■ monikulmiot, ■ monitahokkaat

■ Sisältö  
■ Hakemisto

### Esimerkki 3 algebrallisista menetelmistä geometriassa

Pallon sisään sijoitetaan säännöllinen tetraedri siten, että sen kärjet ovat pallon pinnalla. On määritettävä pallon säteen ja tetraedrin särmän suhde. Olkoon pallon säde  $r$  ja tetraedrin särmän pituus  $a$ .

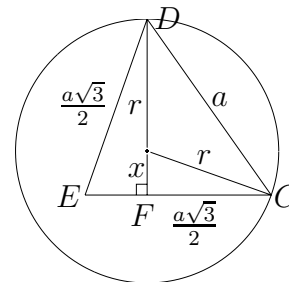
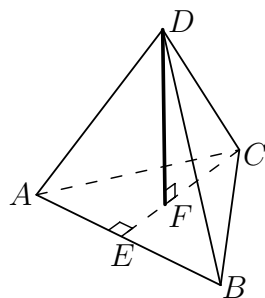
■ pallo  
■ tetraedri  
■ särmä



Säännöllisen tetraedrin sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Tetraedrin korkeusjana kohtaa vastaisen sivutahkon sen keskipisteessä, joka on myös keskijanojen leikkauspiste ja siis jakaa keskijanat suhteessa 2 : 1.

■ tasasivuinen  
■ keskijana

Oheiset kuviot esittävät tetraedria pohjatahkon vastaisine korkeuksineen sekä pallon ja tetraedrin leikkausta sellaisella tasolla, joka kulkee pallon keskipisteen ja tetraedrin kahden kärjen kautta.



Kuvioiden perusteella saadaan Pythagoraan lausetta käyttäen yhtälöt

■ Pythagoraan lause

$$r^2 = x^2 + \left( \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2, \quad a^2 = (r + x)^2 + \left( \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2.$$

Näistä on eliminointi  $x$ , jolloin saadaan pituuksien  $a$  ja  $r$  välinen ehto.

Helpoimmin eliminointi tapahtuu ratkaisemalla edellisestä yhtälöstä  $a^2$  ja sijoittamalla se jälkimmäiseen. Tällöin saadaan  $2(r^2 - x^2) = (r + x)^2$ , mikä voidaan jakaa tekijällä  $r + x$  ( $\neq 0$ ). Tuloksena on  $x = r/3$  ja tämän perusteella  $a/r = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$ .