

Reaalilukujoukko

Reaalilukujoukkoa voidaan luonnollisimmin ajatella *lukusuorana*, molemmissa suunnissa äärettömyyteen ulottuvana suorana, jonka pisteet ja reaaliluvut vastaavat toisiaan: jokainen piste esittää reaalilukua ja toisaalta jokaisella reaaliluvulla on vastinpisteensä. Monissa tapauksissa tämä on riittävä mielikuva reaaliluvuista, mutta varsinaiseksi määritelmäksi se ei kelpaa.

Reaalilukujen huolellinen logiikkaan pohjautuva määrittely on pitkäkö prosessi. Se voidaan tehdä useilla vaihtoehtoisilla tavoilla. Yksi mahdollisuus on lukujoukon vaiheittainen laajentaminen: luonnolliset luvut \rightarrow kokonaisluvut \rightarrow rationaaliluvut \rightarrow reaaliluvut. Tämä vastaa ihmisen intuitiivista ajattelua, mutta formaalina loogisena prosessina on raskas.

■ logiikka

Luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut

Lukukäsitteen määrittelyn lähtökohtana on lukumäärän ilmaisemiseen tarvittava *luonnollisten lukujen* joukko:

■ joukko

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Toisinaan myös 0 (nolla) liitetään tähän joukkoon, ts. sitäkin pidetään luonnollisena lukuna. Kyse on sopimuksesta: joissakin yhteyksissä on käytännöllistä ottaa nolla mukaan, toisissa ei. Periaatteessa molemmat ovat yhtä hyviä ratkaisuja. Luonnollisten lukujen joukolle käytetään symbolia \mathbb{N} .

Kokonaisuuksien osien tarkastelu johtaa murtolukuihin: puolet matkasta; kaksi kolmasosaa palkasta. Toisaalta monien suureiden tarkastelu johtaa myös negatiivisiin lukuihin: pakkasta on viisi astetta, ts. lämpötila on -5° ; hidastuvuus on negatiivista kiihtyvyyttä.

■ murtoluku

Liittämällä luonnollisiin lukuihin vastaavat negatiiviset luvut (ja nolla), saadaan *kokonaisluvut*: $\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Kokonaislukujoukon symboli on \mathbb{Z} .

Rationaaliluvut saadaan liittämällä mukaan positiiviset ja negatiiviset murtoluvut, so. muotoa p/q olevat luvut, missä p on (positiivinen tai negatiivinen) kokonaisluku ja q luonnollinen luku ($\neq 0$). Tällöin kahta rationaalilukua pidetään samoina, jos toinen saadaan toisesta laventamalla tai supistamalla:

■ laventaminen

$$\frac{p}{q} = \frac{np}{nq},$$

missä n on kokonaisluku, $n \neq 0$. Rationaalilukujoukon symboli on \mathbb{Q} .

Irrationaaliluvut

Periaatteessa rationaaliluvut riittävät kaikissa käytännöllisissä tehtävissä. Esimerkiksi minkä tahansa suureen miten tarkka likiarvo tahansa on lausuttavissa rationaalilukujen avulla: $7.3478 = 7 + \frac{3478}{10000}$.

Teoreettisissa tarkasteluissa rationaaliluvut osoittautuvat riittämättömiksi. Klassisia ongelmia ovat neliön sivun pituuden lausuminen murto-osana lävistäjän pituudesta ja ympyrän kehän pituuden lausuminen halkaisijan avulla. Näistä voidaan todistaa, että verrannollisuuskertoimet eivät ole rationaalilukuja:

Pythagoraan lauseen mukaan neliön sivun pituudelle a ja lävistäjän pituudelle c pätee $c^2 = 2a^2$; alkeellisesti voidaan osoittaa, että rationaalilukua, jonka neliö olisi 2, ei voi olla olemassa. Ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhteen — luvun π — osalta todistus on vaikeampi; sen on ensimmäisenä esittänyt Johann Heinrich Lambert vuonna 1761.

Mainituissa tapauksissakin voitaisiin tietysti tyytyä likiarvoihin, mutta on miellyttävää ajatella, että on olemassa täsmällinen suhdeluku. Tämä merkitsee uusien lukujen, *irrationaalilukujen* liittämistä rationaalilukujen joukkoon. Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut yhdessä muodostavat *reaalilukujen* joukon, symbolina \mathbb{R} .

Irrationaalilukua voitaisiin luonnehtia olioksi, jolle on ainakin periaatteessa mahdollista laskea mielivaltaisen tarkkoja rationaalisia approksimaatioita. Itse asiassa täsmällinen määritelmä voidaan perustaa juuri tähän ajatukseen.

■ Pythagoraan lause

■ π

■ π (sarja)

■ Lambert (π)

■ joukko

Desimaaliesitys

Desimaaliesityksen perusteella rationaaliluvut ja irrationaaliluvut voidaan karakterisoida seuraavasti: Jos desimaaliesitys on päättyvä tai jaksollinen, kyseessä on rationaaliluku; esimerkiksi

$$0.3478 = \frac{3478}{10000}, \quad 0.333 \dots = \frac{1}{3}, \quad 0.313131 \dots = \frac{31}{99}.$$

(Näistä viimeksi mainittu voidaan laskea geometrisen sarjan avulla.) Jos desimaaliesitys on päättymätön ja jaksoton, kyseessä on irrationaaliluku; esimerkiksi

■ geometrinen
sarja

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937511 \dots$$

Reaaliluvun desimaaliesitys ei kaikissa tapauksissa ole yksikäsitteinen: $1 = 1.000 \dots$ ja $0.999 \dots$ ovat sama reaaliluku, kuten geometrisen sarjan avulla voidaan todeta.

Rationaali- ja irrationaalilukujen tiheys

Jokaiselle irrationaaliluvulle voidaan löytää miten tarkka rationaalinen approksimaatio tahansa: Jos approksimaatiovirhe ei saa olla suurempi kuin 10^{-n} , otetaan irrationaaliluvun approksimaatioksi päättyvä desimaaliluku, jossa on irrationaaliluvun desimaaliesityksen n ensimmäistä desimaalia.

Rationaali- ja irrationaaliluvuilla on seuraava *tiheysominaisuus*: Miten lyhyellä lukusuoran välillä tahansa on aina sekä rationaali- että irrationaalilukuja. Nämä ovat jopa helposti konstruoitavissa:

Olkoon tarkasteltavana reaaliakselin väli $[a, b]$, missä yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan $0 < a < b$. Tällöin on olemassa luonnollinen luku n siten, että $1/n < b - a$. Koska $1/n \neq 0$, saadaan miten suuria rationaalilukuja tahansa kertomalla $1/n$ sopivalla luonnollisella luvulla. Olkoon erityisesti p pienin luonnollinen luku, jolla $p/n > a$. Tällöin p/n on välillä $[a, b]$ ja väliltä on siis löytynyt rationaaliluku.

■ väli
(reaaliakselin)

Väliltä $[a, b]$ löydetään myös irrationaaliluku muodostamalla ensin eo. konstruktiolla rationaaliluvut r ja s siten, että $a < r < s < b$. Luku $r + (s - r)/\sqrt{2}$ on tällöin etsitty irrationaaliluku: se sijaitsee välillä $[r, s]$ ja on irrationaalinen, koska $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

Reaaliluvut

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: ■ murtoluvut, ■ lukujärjestelmät, ■ kompleksiluvut

6/7

■ Sisältö

■ Hakemisto

Algebralliset luvut ja transkendenttiluvut

Reaaliluvut voidaan jaotella myös seuraavasti: Jos luku on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön juuri, sitä sanotaan *algebralliseksi luvuksi*. Jos näin ei ole, kyseessä on *transkendenttiluku*.

Esimerkiksi π on transkendenttiluku. Algebrallisia lukuja ovat mm. kaikki rationaaliluvut ja neliöjuuret, kuutiojuuret, jne. Vaikkapa $\sqrt[5]{2}$ on algebrallinen luku, koska se toteuttaa yhtälön $x^5 - 2 = 0$. Ensimmäisen asteen yhtälön $197x = 31$ juuri on $\frac{31}{197}$, joten sekin on algebrallinen luku. Algebrallisia lukuja on kuitenkin muitakin, koska läheskään kaikkien polynomiyhtälöiden juuria ei voida lausua juurilausekkeina.

Ks. korkeamman asteen yhtälöt.

■ yhtälö
(polynomi-)

■ juuri
(polynomin)

■ pii

■ pii (sarja)

■ yhtälö
(korkeamman
asteen)

Reaaliluvun itseisarvo

Reaaliluvun x *itseisarvo* $|x|$ määritellään seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x \leq 0. \end{cases}$$

Positiivisen luvun itseisarvo on siis luku itse, negatiivisen luvun itseisarvo on vastaava positiivinen luku, ts. luvun vastaluku.

Vrt. kompleksiluvun itseisarvo.

■ itseisarvo
(kompleksiluvun)