

## Eksponenttifunktio

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ potenssi

KATSO MYÖS: ■ logaritmifunktio

1/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Eksponenttifunktion määrittely ja perusominaisuudet

Yleinen eksponenttifunktio  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  määritellään asettamalla

$$\exp_a(x) = a^x.$$

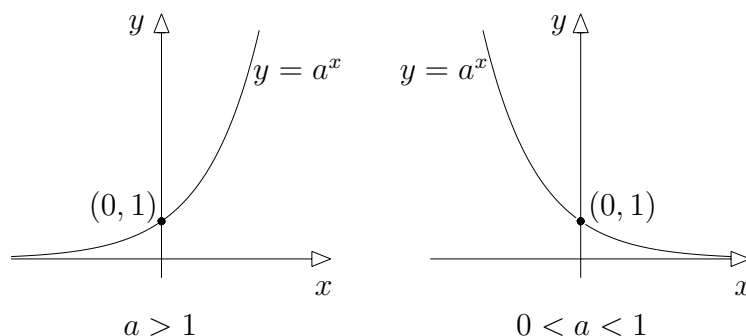
Luku  $a$  on eksponenttifunktion *kantaluku*, jonka tulee olla  $> 0$ , koska potenssi ei muutoin ole — ongelmitta — määritelty kaikilla reaalilla eksponenteilla  $x$ . Tapaus  $a = 1$  antaa vakiofunktion ( $= 1$ ) eikä ole mielenkiintoinen.

Usein eksponenttifunktiolla tarkoitetaan tapausta, jossa kantalukuna on Neperin luku  $e \approx 2.71828$ . Tällöin merkitään  $e^x = \exp(x)$ .

Eksponenttifunktion tärkeimmät ominaisuudet ovat seuraavat:

1. Funktio on määritelty kaikilla reaalilla arvoilla  $x$  ja se saa arvokseen kaikki positiiviset reaaliluvut.
2. Funktio on aidosti kasvava, jos  $a > 1$  ja aidosti vähenevä, jos  $0 < a < 1$ .
3. Potenssin laskusääntöjen perusteella on

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} \quad \text{eli} \quad \exp_a(x_1) \exp_a(x_2) = \exp_a(x_1 + x_2),$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \text{eli} \quad (\exp_a(x))^y = \exp_a(xy).$$



■ funktio

■ potenssi  
(kokonaisluku-)

■ potenssi  
(murto-)

■ potenssi  
(irrationaali-)

■ potenssi  
(kompleksinen)

■ Neperin luku

■ kasvava  
(funktio)

■ kasvava  
(funktio)

■ vähenevä  
(funktio)

■ vähenevä  
(funktio)

## Eksponenttifunktio

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ potenssi

KATSO MYÖS: ■ logaritmifunktio

2/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Yleisen eksponenttifunktion lausuminen Neperin luvun avulla

Yleisen  $a$ -kantaisen eksponenttifunktion käsittely voidaan helposti palauttaa  $e$ -kantaiseen funktioon logaritmifunktion avulla. Koska  $e$ -kantainen eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmi ovat käänteisfunktioita, on  $a = e^{\ln a}$ . Tällöin on

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Tämän avulla voidaan helposti laskea esimerkiksi funktion  $a^x$  derivaatta, kun tiedetään, että  $e$ -kantaisen eksponenttifunktion derivaatta on se itse: Yhdistetyn funktion derivoimissääntö antaa

$$D a^x = D e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Samaa ideaa käyttäen voidaan tutkia myös funktiota  $x^x = e^{x \ln x}$ .

■ Neperin luku

■  
logaritmifunktio

■  
käänteisfunktio

■  
käänteisfunktio

■ derivaatta

■ yhdistetty  
funktio

■ derivaatta  
(yhdistetyn  
funktion)

■ derivointi (al-  
keisfunktioiden)

## Eksponttifunktio

ESITIEDOT: ■ reaalifunktiot, ■ potenssi

KATSO MYÖS: ■ logaritmifunktio

3/3

■ Sisältö

■ Hakemisto

### Eksponttifunktio sovelluksissa

Eksponttifunktion  $y = e^{kx}$  merkitys sovelluksissa perustuu paljolti siihen, että se toteuttaa differentiaaliyhtälön

■ differentiaaliyhtälö

$$y' = ky.$$

Monia ilmiöitä voidaan nimittäin kuvata tämäntyyppisellä differentiaaliyhtälöllä. Differentiaaliyhtälöä sanotaan ilmiön *matemaattiseksi malliksi*.

Olkoon esimerkiksi  $p(t)$  funktio, joka esittää väestön suuruutta ajanhetkellä  $t$ . Voidaan ajatella, että väestön lisäys  $\Delta p$  lyhyellä aikavälillä  $\Delta t$  on suoraan verrannollinen olemassaolevan väestön määrään ja aikavälin pituuteen:  $\Delta p = kp\Delta t$ , missä  $k$  on positiivinen verrannollisuuskerroin. Jakamalla aikavälin pituudella  $\Delta t$  saadaan

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = kp.$$

Koska  $\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t)$ , on vasen puoli väestön suuruutta ajanhetkellä  $t$  kuvaavan funktion  $p(t)$  erotusosamäärä, jolloin saadaan differentiaaliyhtälö

■ erotusosamäärä

$$p'(t) = kp(t) \quad \text{eli} \quad p' = kp,$$

kun  $\Delta t \rightarrow 0$ . Tämä on differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuna on eksponttifunktio  $p(t) = Ce^{kt}$ ; tässä  $C$  on mikä tahansa vakio.

■ derivaatta

Eo. differentiaaliyhtälöä kutsutaan väestönkasvun eksponentiaaliseksi malliksi. Sellaisena se on luonnollisesti äärimmäisen yksinkertainen, koska esimerkiksi kuolleisuuteen ei ole kiinnitetty mitään huomiota, ei myöskään populaation kasvaessa yhä rajallisemmiksi muuttuviin ympäristöresursseihin kuten saatavilla olevaan ravintoon yms.

Samantyyppiseen malliin päästään tarkasteltaessa aineen radioaktiivista hajoamista. Hajoavien atomien määrä  $\Delta m$  on suoraan verrannollinen aineen määrään kyseisellä hetkellä  $m(t)$  ja tarkasteltavan aikavälin pituuteen  $\Delta t$ . Siis:  $\Delta m = -km\Delta t$ . Miinusmerkki aiheutuu siitä, että  $\Delta m$  merkitsee aineen vähenemistä ja on siis negatiivinen; kerroin  $k$  oletetaan positiiviseksi.

Samaan tapaan kuin edellä tästä päädytään differentiaaliyhtälöön  $m' = -km$ , jonka ratkaisu on  $m = Ce^{-kt}$ . Tässä  $C$  on vakio, joka riippuu ainemäärästä tarkastelun alkuhetkellä. Verrannollisuuskerroin  $k$  on aineelle ominainen vakio (vastaten puoliintumisaikaa).