

**Luvun  $\pi$  määritelmä**

Luku  $\pi$  on minkä tahansa ympyrän kehän ja halkaisijan suhde. Kyseessä on irrationaaliluku, jonka 50 ensimmäistä desimaalia ilmenevät seuraavasta:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937511 \dots$$

$\pi$  on transkendenttiluku, ts. se ei voi olla kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön juuri.

■ irrationaaliluku

■ transkendenttiluku

■ yhtälö  
(polynomi-)

**Luvun  $\pi$  laskeminen alkeellisesti**

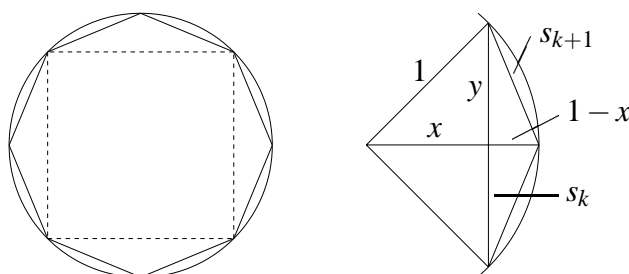
Alkeelliset menetelmät  $\pi$ :n arvon laskemiseen perustuvat ympyrän sisään ja ympäri piirrettyjen monikulmioiden piirien laskemiseen. Jos ympyrän säde on  $= 1$  ja ympyrän sisään piirretyn  $2^k$ -kulmion sivun pituus  $s_k$ , saadaan  $2^{k+1}$ -kulmion sivun pituudelle  $s_{k+1}$  palautuskaava

■ monikulmio

$$s_{k+1}^2 = \frac{s_k^2}{2 + \sqrt{4 - s_k^2}}$$

Pythagoraan lausetta ja yksinkertaista algebraa käyttäen.

■ Pythagoraan lause



Kun lisäksi otetaan huomioon, että  $s_2 = \sqrt{2}$ , lukuja  $s_2, s_3, s_4, \dots$  voidaan laskea miten pitkälle tahansa. Koska  $s_k$  on  $2^k$ -kulmion sivu ja  $2^k$ -kulmion piiri ilmeisestikin lähestyy ympyrän kehän pituutta  $k$ :n kasvaessa, on

■ raja-arvo (lukujonon)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k-1} s_k = \pi.$$

Alalikiarvoja  $\pi$ :lle saadaan siis luvuista  $2^{k-1} s_k$ .

Vastaavasti saadaan ylälikiarvoja ympyrän ympäri piirretyistä  $2^k$ -kulmioista.

**Sarjakehitelmiä luvulle  $\pi$** 

Myös sarjakehitelmistä voidaan laskea  $\pi$ :n likiarvoja. Ilman tarkempaa johtamista esitettäköön seuraavat:

■ sarja

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \dots, \\ \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots, \\ \frac{\pi^4}{96} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = 1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \frac{1}{2401} + \dots.\end{aligned}$$

Näistä ensimmäinen on erittäin tehoton laskentamenettely: Sarjasta on otettava 40 miljardia termiä, jotta  $\pi$  saataisiin 10 desimaalin tarkkuudella. Toisesta sarjasta riittää samaan tarkkuuteen 20 termiä. Sarjojen suppenemisnopeuksissa voi siis olla merkittäviä eroja. Mikään eo. sarjoista ei anna kovin hyvää menetelmää  $\pi$ :n laskemiseen.

■ termi

■ suppeneminen  
(sarjan)

## Luvun $\pi$ historiaa

Ympyrän kehän ja halkaisijan suhteelle käytettiin erilaisia arvoja jo vanhan ajan Egyptissä ja Babyloniassa. Kuitenkin vasta kreikkalaiset tutkivat geometriaa perusteellisemmin ja päättelivät ympyrän koosta riippumattoman suhteen olemassaolon. Eukleideen (n. vuonna 300 eKr.) *Stoikheia* (lat. *Elementa*) -teoksen XII kirja alkaakin todistuksella, että ympyröiden alat suhtautuvat toisiinsa kuten halkaisijoiden neliöt.

■ geometria

■ geometria

■ Eukleides

Arkhimedes (200-luvulla eKr.) käytti likiarvoja  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$  ( $3.1408 < \pi < 3.1429$ ). Arabimatemaatikko al-Kaši laski  $\pi$ :lle likiarvon 16 desimaalin tarkkuudella 1400-luvulla, hollantilainen Ludolph van Ceulen 35 desimaalilla 1500- ja 1600-lukujen vaihteessa. Tietokoneaikakausi on ratkaisevasti lisännyt mahdollisuuksia:  $\pi$  laskettiin syyskuussa 1999 Japanissa 206 miljardin (tarkemmin sanotuna 206 158 430 000) desimaalin tarkkuudella.

■ Arkhimedes

■ al-Kaši

Luvun  $\pi$  irrationaalisuuden todisti sveitsiläis-saksalainen matemaatikko Johann Heinrich Lambert vuonna 1761, transkendenttisuuden saksalainen Ferdinand von Lindemann 1882.

■ Lambert (hyperbelifunktiot)

Kreikkalaisen kirjaimen  $\pi$  (pikku pii) käyttö ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen symbolina on peräisin suhteellisen myöhäiseltä ajalta. Sen käyttö vakiintui vasta 1700-luvulla Leonhard Eulerin kirjoituksissa.

■ kreikkalaiset kirjaimet

■ Euler